COMMERCIUM EPISTOLICUM,

DE

Quæstionibus quibusdam *Mathematicis* nuper habitum.

Inter Nobilissimos Viros

D. *Gulielmum* Vicecomitem *Brouncker*, *Anglum*;

D. *Kenelmum Digby*, item Equitem *Anglum*;

D. *Fermatium*, in suprema *Tholosatum* Curia Iudicem Primarium;

D. *Freniclum*, Nobilem *Parisinum*.

Una cum

D. *Joh. Wallis* Geomet: Profess: *Oxonii*.

D. *Franc*: *a Schooten*, Math: Prof: *Lugduni Batavorum*; Aliisque.

Edidit JOHANNES WALLIS, S. Th. D. in celeberrima *Oxonienſi* Academia Geometriæ Professor *Savilianus*.

OXONII,

Excudebat *A. Lichfield*, Acad. Typograph. Impensis *Tho. Robinſon*, M. DC. LVIII.

96.j.346

Illustrissimo, Nobilissimoque Viro,

D. KENELMO DIGBY.

EQUITI ANGLO

D. D.

Johannes Wallis.

Eques Illustrissime Nobilissimeque,

Voties apud me recogito, quam multiplici me obligatum tenes beneficio, despero plane, nec ulla mihi supersit expectatio, favores tuos vel meritis exæquandi, vel pares tantis beneficiis rependendi gratias. Neque tam aliis me superiorem difficultatibus fas est existimare, quam vel Te dignis vel Tibi debitis gratiis rependendis prorsus imparem. Insignis utique honoris loco, nec facile æstimandi, habere debeo; quod me nec expetentem, nec ad hoc honoris aspirantem, dignatus fueris favore tuo prosequi; sed & insuper me meaq; aliis summis viris ultro commendata dederis. Verum & de rebus & fama nostra non secus fueris solicitus, eisque promovendis sedulus, quam si tua res agatur. Tuum quidem est, Tibique in solidum debetur, tum quod in tuum ipsius, tum & aliorum simul illustrium virorum commercium me advocaveris; eaque ab illis de nobis elogia obtineris, quæ & superant quicquid ego inde mihi expectare possem, nedum polliceri, quæque mihi salvâ modestiâ neutiquam vendicare potero. Quamvis enim problemata nonnulla

tum Arithmetica tum Geometrica à Clarissimis Viris Fermatio *&* Freniclo *proposita* (*quos, quod ais, ut summos in hisce rebus Gallia sustulit,*) *ad mandatum tuum fuimus aggressi, & soluta dedimus, vel Honoratissimus Vicecomes* Brouncker, *vel & ipse; non tamen ut inde vel Hercules aut Samsones habeamur, vel ex summis hujus ævi Magistris* (*quæ nobis erubescentibus à summis viris collata vidimus encomia*) *ullatenus expectavimus, nedum vendicamus: saltem ego;* (*nolim etenim Nobilissimi Vicecomitis, Doctissimique, meritis derogatum ire.*) *Sed & summis hisce viris debentur gratiæ* (*quas meo nomine reponas oro*) *qui & commercio suo dignati sunt, & me humaniter acceperunt. Neque enim imputandum puto siquid disceptantibus durius exciderit. Atque eosdem item oratos velim, ut siquid vel meo vel Honoratissimi Vicecomitis nomine liberius protulimus, eosve non satis pro dignitate sua compellavimus, me excusatum habeant, morum & dignitatum istius gentis ignarum, ut qui in tam Illustres & summos viros non lubens peccarem. A Te tandem, Eques Illustrissime; quem, favore tuo audaciores facti, toties lassavimus, veniam pro laude peto. Nec dedigneris, oro, quod tua Tibi denuo porrexerim; utpote quorum pars longe maxima vel à te vel ad te scripta. Cui & publicas deberi gratias profitemur, qui Te tam sedulum patronum Gentis Anglicanæ, deque illorum fama tam solicitum tum hic tum alias præstitisti: Si id saltem erroris condonetur, quod me tam tenuem atque imbellem pugilem; cum his Athletis decertaturum evocaveris. Utut enim, in præsenti negotio, haud plane infeliciter rem transegisse videamur, nolim tamen ut ex tenuitatis meæ modulo Anglorum vires æstimentur. Vale, Vir Insignissime, diuque vivas, bonarum literarum strenuus promotor, & Anglicanæ gentis ornamentum.*

COM-

COMMERCIVM EPISTOLICVM DE Quæstionibus quibusdam *Mathematicis*, nuper habitum.

EPISTOLA I.

D. *Vicecomitis Brouncker ad* D. *Joh. Wallis. Oxonium.*

EX literis tuis, Vir Clarissime, 22. *Feb.* datis, persentio quam Tibi sim obstrictus, & quibus me devinctum habes obligationes crescentes indies. Quod enim quâ in te usus sum libertatem benignè dignatus es interpretari, id ego justi habeo beneficii loco, quamobrem & animitus rependo gratias. Inclusam quam cum his habebis chartulam, à D. *White* hesterno die accepi, quam ut tibi transmitterem à me petebat. Propositionem existimo difficiliorem tuturam quam prima fronte videatur; secus enim eum quem præ se ferre videtur stipulum vix merebitur. Ut ut sit, non dubito quin illam cito sis soluturus; quod & aliquando fortasse faciet

5. Martii. 1656. 7 *Fidissimus amicus, tuique observantissimus,* BROUNCKER

Inclusa charta sic erat inscripta.

A challenge from M. Fermat, *for D.* Wallis,
With the hearty commendations of the messenger,
Thomas White.

PRoponatur (si placet) *Wallisio*, & reliquis Angliæ Mathematicis, sequens quæstio numerica.

Invenire Cubum, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat Quadratum. Exempli gratia. Numerus 343. est Cubus,

 à latere

à latere 7. Omnes ipsius partes aliquotæ sunt 1, 7, 49; quæ adjunctæ ipsi 343. conficiunt numerum 400, qui est quadratus à latere 20.

Quæritur alius cubus numerus ejusdem naturæ.

Quæritur etiam numerus quadratus qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiet numerum Cubum.

Has solutiones expectamus; quas si Anglia aut Galliæ Belgica & Celtica non dederint, dabit Gallia Narbonensis, easque in pignus nascentis amicitiæ D. *Digby* offeret & dicabit.

EPISTOLA II.

D. *Joh. Wallis ad* D. *Vicecom. Brouncker. Londinum.*

Literas tuas (Honoratissime Domine) pridie datas, hesterna nocte accepi, cum inclusa simul D. *Fermatii Charta*. Est autem ea quæstio ejusdem fere generis cum iis quæ de numeris Perfectis (ut loquuntur) & Deficientibus aut Redundantibus exponi solent Problematis, aliisque id genus, quæ ad universalem aliquam æquationem, quæ ad omnes casus respiciat, vix aut ne vix reducuntur. Quicquid autem id sit, cum jam me multiplici negotio occupatissimum deprehendat, non vacat ei statim attendere. Id saltem impræsentiarum habeat responsi loco; *Unum eundemque numerum* 1, *utrique quæsito satisfacere*. Sed & sui similem liceat hanc quæstionem proponere; *Juvenire duos numeros quadratos, qui partibus sui aliquotis additi, eandem efficiant summam*. Exempli gratia; 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31 = 25 + 5 + 1. Inveniantur istiusmodi alii duo. Denique salutem D^ni. Væ precatus optimam, & observantiam officiosè testatus, me velim reputes,

Oxonii Mart. 7. 1656 *Honoratissime Domine,*
7. *Dnis. Væ. Servum Obsequentissimum,*

J. WALLIS.

Statim post has literas, ab eodem D. Fermatio (quasi post habitis prioribus, quas uti videtur D. Freniclus interea solverat) allata est ad D. Vicecom. Brouncker quæstio tertia, cujus itē solutionem

tionem unà cum ſolutionibus præcedentium, brevi ſcripto ad D. White (à quo acceperat) indicabat, eodem (ni fallor) Menſe Martio, (quas & idem D. White Pariſios tranſmiſit.) Verum cum iſtius ſcripti nullum apud ſe retinuerit exemplar D. Vicecomes, non poſſumus illud hic verbatim inſerere; ſed illius ſumma deinceps recenſebitur *Epiſt.* IX. Hinc autem factum eſt, quod ulteriori præcedentium ſolutioni deinceps non incubuimus, utpote quas author ipſe viſus eſt negligere, ſubſtitutâ in earum locum tertia cui magis confidebat; quam & propediem ſolverat D. Vicecomes.

EPISTOLA. III.

D. *Vicecomitis Brouncker, ad* D. *J. Wallis.*

INcluſam hanc, Vir Clariſſime, D. Fermatii Epiſtolam ad Illuſtriſſimum equitem D. Kenelmum Digby conſcriptam, à D. White heſternâ nocte accepi; quam & tibi jam prima occaſione data offerendam cenſui. Quod nondum ſibi plene perſuaſum ſit de veritate tuæ quadraturæ Circuli, ego facile credo; Quippe, ni fallor, tractatum illum non niſi leviter inſpexit. Secus enim advertiſſet, credo, ex prop. 101, 102, 103, 104, 105, contrarium iſtius, quod, de Hyperbolis ſuis Infinitis verba faciens, videtur innuere, Quod nempe *Tu figuras illas non fueris contemplatus.* Quæ de centro Gravitatis, in figuris illis habet, virum illum indicant eum quam de illo famam accepimus merentem. Eritque tibi, credo, uti & mihi, non ingratum, demonſtrationem videre, quique rem illam ſpectat, canonem quem innuit generalem. Denique, cum hoc quod mittitur ſit Autographum, expectabit, credo, D. White ut ipſum illi reſtituam; remittas itaque, oro,

Londini Maii 30. 1657. *Vir Clariſſime,*

Amico tuo fidiſſimo, tuique obſervantiſſimo.

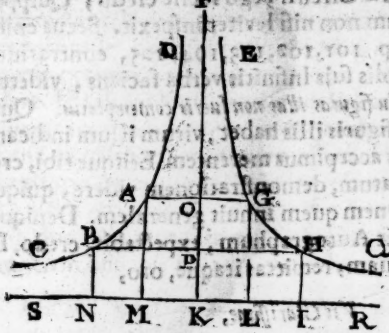
BROUNCKER.

EPISTOLA IV.

D. Fermatii ad D. Kenelmum Digby Equitem Anglum: (præcedenti inclusa.) Parisios.

Monsieur,

PUis que Vous voules, que les compliments cessent, soit faict. Il me suffict de vous asseurer une fois pour toutes, que vous vous estes tres-justement acquis un pouvoir absolu sur moy, & que je ne perdray point d' occasion à vous le tesmoigner. J' ay leu l' *Arithmetica Infinitorum* de Wallisius, & j' en estime beaucoup l' Autheur. Et bien que la quadrature tant des paraboles, que des hyperboles infinies ait esté faicte par moy depuis fort longues années, & que j' en aye autres fois entretenu l' illustre Toricelli, je ne laisse pas d' estimer l' invention de Wallisius, qui sans doubte n' a pas sçeu, que j' eusse preoccupé son travail. Voicy une de mes propositions aux termes que je la conceus en l' envoyant à Toricelli. Soyent les deux droictes SKR, & KOF. Et soyent descrites les courbes EGHQ d'un costé, & DABC de l'autre, en forme d' hyperboles, dont les asymptotes soyent les droictes premierement données. Soyent encore tirées AG, BH, paralleles à SKR, & les droictes BN, AM, GL, HI, paralleles à KOF. En l' hyperbole ordinaire le rectangle NP est esgal au rectangle MAO. Mais supposons maintenant, que le produict du quarré BN & de la droicte BP, soit esgal au produict du quarre MA & de la droicte AO. En ce cas la courbe sera une nouvelle hyperbole, dont la proprieté sera, que le par allelogramme BI sera esgal à l' espac



ſpace compris ſoubs la baſſe B H, & les deux courbes B A D F, F E G H qui vont à l'infini du coſté de F. Que ſi le produict du cube B N & de la droicte B P, eſt eſgal au produict du cube A M & de la droicte A O, en ce cas ce ſera un autre hyperbole, dont la proprieté ſera, que le parallelogramme B I ſera double de l'eſpace compris ſoubs la baſe B H & les deux courbes en montant, ut ſuprà. Et par regle generale, Si le produict d'une puiſſance de B N par une puiſſance de B P, eſt eſgal au produict d'une pareille puiſſance de M A par une pareille de A O, en ſuppoſant celles de B N & M A pareilles entre elles, comme auſſi celles de B P & de A O auſſi pareilles, le parallelogramme B I ſera a la figure prolongée à l'infini, ut ſupra, comme la difference de l'expoſant de la puiſſance de B N avec l'expoſant de la puiſſance de B P, eſt à l'expoſant de la puiſſance de B P. De ſorte qu'il ſuit delà, qu'en l'hyperbole ordinaire, l'eſpace dela figure prolongée à l'infini n'eſt point eſgal à un eſpace donné, par ce que l'expoſant des puiſſances eſtant le meſme ne donné aucune difference. Et pour faire que l'eſpace dela dite figure prolongée à l'infini ſoit eſgal à un eſpace donné, il faut que l'expoſant de B N ſoit plus grand que celuy de B P. comme il eſt aiſé de remarquer. Tout cecy quoyque non ſi un peu diverſement ſe peut tirer du livre de Walliſius. Mais il ne a pas faict une ſpeculation ſur ces figures, de laquelle il ſera ſans doubte bien aiſe d'eſtre adverti, & qui peut paſſer pour un des miracles dela Geometrie. Je l'ay autrefois donné à Toricelli auſſy bien que la precedente. C'eſt comme il arrive que quelques fois l'eſpace prolongé à l'infini, comme B A D F E G H eſt auſſy infini, comme en l'hyperbole ordinaire, & quelques fois fini, comme en celles dont les expoſants de B N ſurmontent ceux de B P. On demande, ſi, lors que le dict eſpace prolongé à l'infini eſt eſgal à un eſpace fini, il a un centre de gravité fixe & certaine. Or il arrive un choſe merveilleuſe en cette recherche, & laquelle j'ay decouverte, & demonſtrée, c'eſt que quelques fois le dict eſpace quoyque fini n'a point de centre de gravité fixe, & quelques fois il en a. Car par exemple, lors que le produict du quarré B N, & dela droicte B P, eſt eſgal aux produicts ſemblablement tirés, la figure B A D F E G H prolongée à l'infini qui en ce cas eſt eſgal au parallelogramme B I, n'a pourtant aucun cen-

tre de gravité. Mais ſi le produict, par exemple du cube BN & de la droicte BP eſt eſgal aux produicts ſemblables & ſemblablement tirés, en ce cas non ſeulement l'eſpace de la figure prolongée à l'infini, eſt eſgal à un eſpace donné, qui eſt, comme nous avons dit, la moitié du parallelogramme BI, mais encore cette figure prolongée à l'infini à un centre de gravité, qui va en ce cas en la ligne PF coupée en telle ſorte au point O, que la ligne PO ſoit eſgalle à la ligne KP. Et ce point O ſera le dict centre de gravité de cette figure prolongée à l'infini. Si Monſieur Walliſius veut avoir la demonſtration de cette propoſition & de la regle generalle pour trouver les dicts centres de gravité, je vous l'envoyeray pour luy en faire part.

Pour ce qui regarde la quadrature du cercle dans ſon dict traicté, je n'en ſuis pas pleinement perſuadé, car ce qui ſe deduit par comparaiſon en Geometrie, n'eſt pas touſiours veritable.

Je ne Vous parle pas ni de voſtre livre, ni de celuy de Thomas Anglus, *ne ſutor ultra crepidam.* Vous eſtes ſouverain en Phyſique, & je Vous recognois pour tel. J'eſpere pourtant au premier voyage Vous entretenir de la proportion que gardent les graves dans leur deſcente naturelle, de quoy vous avés traicte dans voſtre livre que M. Bourel m'à fait la faveur de me faire voir. Je ſuis,

A Caſtres le 20. Avril. 1657.

MONSIEUR,

Voſtre treſhumble, & treſobeïſſant ſerviteur,

FERMAT.

EPISTOLA V.

D. *Joh. Wallis ad illuſtriſſimum Equitem D. Kenelmum Digby.*

NOn levem (Heros Nobiliſſime, Doctiſſimeque, laboris mei reputo mercedem, quod noſtras qualeſcunque lucubrationes tum introſpicere digneris ipſe, tum & (quaſi tanti eſſent) aliorum

Horum ea de re rogare ſententiam. Quum enim celeberrimum Digbeii nomen, & eruditionem limatiſſimam, latere neminem patiantur (ut reliqua taceam) quæ in publicum emiſiſti ſcripta, omnigenâ eruditione refertiſſima; non parum illud laudis erit, ea enarrâſſe, quæ tanto viro, ſi non per omnia ſatisfaciant, tanti ſaltem videantur ut nec contemnas penitus. Quodque inſignem tuam clementiam, nobilitatis veræ comitem, ornat maximè, latentem plane, tibique aliàs ignotum penitus, & immerentem, hoc me honore cumulâſti. Perſentio utique ex literis illis, à Nobiliſſimo D. Fermatio ad te ſcriptis, (quas pro ſumma tua humanitate, curaveris per D. White mihi communicandas, eoque me tibi obligatum devinxeris,) tum Fermatii ea de re ſententiam rogâſſe tum & obtinuiſſe.

Verùm & Nobiliſſimo Fermatio eſt quod debeam, ut qui tum evolvere noſtra dignatus eſt, tum de ejs ſententiam non ſine honore ferre; ſed & tum ea tum me propterea æſtimare: quod quidem à tanto viro, Matheſeos peritiſſimo, non eſt cur parvi faciam.

Quod autem exiſtimat Vir Nobiliſſimus, mihi neutiquam ſubeluiſſe, quid ipſe pridem de Parabolis Hyperboliſve quadrandis invenerat; id eouſque verum eſt, ut ne quidem, ſi memini, Fermatii nomen (liceat enim ignorantiam meam ingenue fateri) prius inaudiveram, quam quæ de hoc negotio tradidimus tum pridem ſcripta fuerant tum & impreſſa; neque enim ſi noveram diſſimulaſſem. Et quidem beneficii loco æſtimo, vel hinc in tanti viri notitiam perveniſſe, tantum abeſt ut inventis ego ſuis quidquam derogatum velim: Magis utique velim, ut quæ apud ſe premit inventa, (quæ quidem egregia plane fore mihi facile perſuadeo,) publici juris faceret, nec invideret orbi literato.

Ad ea interim quæ præſens exhibet Epiſtola, omnino parum eſt quod dicam. *Novas* illic quas appellat *Hyperbolas*, à ſe quadratas, ipſiſſimæ ſunt figuræ quas in mea *Infinitorum Arithmetica* quadrandas docui prop. 102. Sicut & quæ habetur prop. 103. Eſt vera Hyperbola, (quod & indicatum eſt prop. 95.) Quas autem excludit ipſe, tanquam Quadraturæ incapaces, eaſdem ego excluſeram (neque enim de aliis apud me atque illum agitur) prop. 104. Verum & (quod neſcio an ipſe ſatis adverterit) hæ curvæ prop. 104. Non aliæ ſunt ab illis prop. 102. Sed eædem

ipſiſſimæ

ipsissimæ, ex altera parte continuatæ; quod & infinuavimus prop. 109.

Unde autem factum sit quod ex hujusmodi figuris infinitè continuatis, aliæ sint item magnitudine infinitæ, aliæ verò non nisi finitæ, adeoque finitis speciis æquales, id ipsum etiam à nobis traditum est in Scholio prop. 101. ubi, ni fallor, genuina & proxima mirandi hujus symptomatis causa traditur: quæ num coincidat cum ea quam Torricellio Fermatius assignaverat, haud valeam affirmare, nisi & hanc suam noverim.

Verùm si Nobilissimo Viro visum fuerit, vel suam Parabolarum aut Hyperbolarum quadrandarum methodum indicare, vel etiam κρίτηριον illud quo figuras ejusmodi magnitudine infinitas à finitis distinguit, veramque Symptomatis rationem; erit & illud mihi pergratissimum. Quanquam enim horum utrumque meâ methodo, ut dictum est, præstitimus; non tamen eousque nostris inventis arrogare soleo, vel etiam indulgere, ut aliorum propterea negligenda duxerim.

Quod & de eis quæ centrum gravitatis spectant intellectum velim. Quam totam ego speculationem consultò omisi. Quanquam enim, ex iisdem quibus utor principiis, de gravitatis centro tum in Parabolis omnigenis, tum & aliis figuris quamplurimis sive planis sive solidis, facile esset statuere, mihique etiam aliquando in animo fuerit ad hæc divertere; Ne tamen in Digressionibus nimius essem, nimisque abrumperem Theorematum filum, aut perplexæ materiæ varietate nimia lectorem enecarem; tum hac, tum aliis item speculationibus quamplurimis non injucundis, plane abstinendum censui, contentus interim nonnunquam, digito (in Scholiis) intento, consultò prætermissa indicare, & non raro etiam ne hoc quidem.

Quod vero hujusmodi inventorum suorum Vir Nobilissimus mihi copiam facere, modò illud expetam, humanissimè pollicetur; hoc quidem mihi, modò illi grave non fuerit, fore pergratissimum sciat velim; utpote à quo nihil non accuratum, nihil non sublime, mihi polliceor.

Quod denique de Circuli Quadratura à nobis tradita, sibi haud usquequaque persuasum adhuc esse subindicaverit; eo præsertim, quòd quæ ex comparationibus in Geometria deducantur haud ita sempèr succedant, quin à veritate nonnunquam aber-

ren-

rent: Ego quidem facile patior Cl. V. hac ex parte ſuſpicacem eſſe, donec rem accuratius excuſſerit, ut qui noverim quam in lubrico loco res ea conſiſtat & lapſui proclivis ſit. Verùm hoc me, hujus minimè ignarum, magis itaque ſuſpenſum tenuit & ſolicitum, & quantum potui perſpicacem, per totum itineris decurſum, nequid hujuſmodi mihi aliquando imponat incauto, & in devia ſeducat. Quod & tantâ cum cautelâ factum eſſe confido, ut nullis uſpiam hujuſmodi comparationibus uſus fuerim, niſi quæ & Geometricum examen ferre poſſint, & quibus ſubſit juſtæ demonſtrationis fundamentum, utut illud non prolixe ſemper proſecutus fuerim, quòd & operoſo labori noſtro, & lectoris tædio, proſpectum ſit: quod &, ſi cubi quis hæreat, facilè ſupplebitur. Et quidem, quod ad rei ſummam attinet, ne admiſſi erroris nimium ſim ſolicitus, id etiam facit, quòd Honoratiſſimus D. Gulielmus Vicecomes Brouncker, harum rerum callentiſſimus, (cujus non ſine honore ſummo mentio facienda erat ad prop. 191.) calculi numeroſi examen adhibens, & ad decimum uſque locum perducens, invenit ex voto omnia ſuccedere. Rationem quippe Perimetri ad Diametrum inde colligit,

$$\left.\begin{array}{l}\text{majorem quam } 3.14159,26535,69+\\ \text{minorem quam } 3.14159,26536,96+\end{array}\right\} \text{ad } 1 : \text{(quæ cum}$$

numeris Ludovici van Kulen, & aliorum, conveniunt:) Sed &, in toto proceſſu, alternatim nunc excedentem, nunc deficientem, ut oportuit: ut non dubium ſit quin eo rite pervenerim.

Atque hæc ſunt, Heros Nobiliſſime, quæ ad Fermatii Epiſtolam dicenda duxerim; quæ & ipſi, ſi tibi viſum fuerit, liceat impertire. Id ſupereſt ut, de hoc quo me dignatus es honore, teſtatus gratitudinem, omniaque tibi felicia precatus, me tandem proripiam.

Oxoniæ, Junii 6. 1657.

Nobiliſſimè Domine,

Tui obſervantiſſimum pariter & obſequentiſſimum Tibi,

J. WALLIS.

EPISTOLA VI.

D. *Kenelmi Digby ad* D. *Wallis.*

Moſt honoured and worthy Sir,

THe letter you have done me the favour and honour to write me of the 6. of June, came to this towne for me when I was abſent from it; and immediately upon my returne, I was ſeized upon by a ſickeneſſe (the reliques of a greater I had at *Poitiers*) which hath till now hindered me from giving you thoſe humble thankes and paying you that obliged reſpect which I owe you. And now that I am going about it, I find my ſelfe to fall very ſhort of what I either deſire or ought to do. For, ſeeing that the meaſure of all civilities or obligations, is to be taken, either from the dignity of the perſon that conferreth them, or from the merit of him that receiveth them; I find in both thoſe ſo huge a diſproportion (in my preſent occurrent) that it is no obſequiouſneſſe of language or endearingneſſe of expreſſions, that can ballance them. I will not therefore embark my ſelfe in that impoſſible taske; but ſeeing it is meerely your goodneſſe that hath diſpoſed you to be thus kind and favourable to me; I will have recourſe to the ſame goodneſſe, in beſeeching you to accept of the profeſſion I here make you with all truth and ſincerity, that as I honor moſt highly your great parts and worth, and the noble productions of your large and knowing minde (which maketh you the honor of our nation, and the envy of all others,) ſo I entitle you to the right of commanding alwayes whatſoever may depend of me for your ſervice, and I will upon all occaſions ſeale it with as ready a performance as you can wiſh from the moſt acquired friend and ſervant you have.

My health hath not permitted me to write to Monſ. Fermat till yeſterday (the poſt-day for *Tholoſe*) that I withall have ſent him a copy of your letter to me. What I ſhall receive from him

in

in returne thereof, I will presently acquaint you with: and do thinke my selfe very happy & much honoured to be the mediator of a communication between two so great personages. I make account M. White will send you the copy of a late letter from Monsr. Fermat to me, that I now send him to shew my Lord Brouncker before he conveyeth it to you, because he is mentioned in it. I conceive that my Lords letters were not well translated to Monsr. Fermat: But for his doubting that my Lords solution of his Probleme is not a good one because he maketh slight of it, is no good argument, as Monsr. de Frenicle hath shewed by experience: for, the same Probleme being shewed him (as a challenge to all the Mathematicians of Europe) he gave the pers̃ that brought it him, fuor Solutions (in four severall numbers) immediatly, and sent him six more the next morning together with a further Problem built upon his, forhim to solve; which I beleeve may prove very tough worke to him.

I must not take leave of you, till I have spoken a word or two of your worthy Colleague Doctor Ward. It is some time since I have heard of his booke against M. Hobbes. And M. White had sent it over hither for me whiles I was in *Languedoc*; But I had not seene it till now, that I have greedily read it over with much content and pleasure. Onely, where he is pleased to speake advantagiously of me beyond my merit (exceedingly beyond it) my blood still came with blushes into my cheekes, through shame for not being able to correspond with the Idæa he rayseth of me; and shame being a kind of griefe, you will easily believe that unmerited prayses must be heavy to me. Yet to confesse truly to you, I cannot so far weane my selfe from vanity, as not to be touched and delighted (in a very high manner) with what so learned and brave a man speaketh favourably of me. I will end this point concerning him, with beseeching you to present my most humble service to him (for I conceive, you see him often) with most harty and obliged thankes for his excessive civilities to me, together with assurance that I esteeme and honour him with all my heart. It is a worthy Triumvirate that you two and Doctor Wilkins do exercise in literature and all that is worthy. Your names are famous abroad; and I heare of you from sundry hands; but from none more largely or

more affectionately then from M. White; whom, your goodneſſes have wonne to be entirely yours; and he amply expreſſeth it upon all occaſions. But I am too ample in diſturbing your great and manifold employments. I crave your pardon for it; and do aſſure you that I am, and will ever approve my ſelfe,

From Paris the
1. Aug. of 1657.

Worthy Sir,

Your Moſt humble and moſt obedient ſervant,

KENELME DIGBY.

EPISTOLA VII.

D. *Joh. Wallis ad* D. *Kenelmum Digby.*

Right Noble Sir,

VPon ſight of your extremely civill letter of the 7. of Auguſt, which I had the honour two dayes ſince to receive from you, it is not eaſy to ſay how much I found my ſelf ſurprized; knowing how little I had deſerved from ſo noble a hand, and how ſmall a ſhare was due to mee of what you are pleaſed ſo liberally to impute. I was aſhamed, I confeſſe, to think how little I durſt own, of that honour you put upon mee; and ſhould have bluſhed deeply, had not the ſuddenneſſe of that ſurprizall ſo much appaled mee. And when I thought of any reply, I found that you had therein prevented mee; in ſaying ſo much of what I ought to have ſayd, that, unleſſe I would tranſcribe and return you back your own words again (for better I could not) I had nothing left to ſay. And yet this I durſt not; for fear of polluting that language, which I cannot preſume to imitate, by ſo rude a pen. If you will but favour mee ſo far, as to peruſe the copy of your own letter, & interpret the greateſt part thereof as ſayd by mee, as an acknowledgement of thoſe civilities which I could not deſerve, and a diſclaiming of thoſe deſerts which I

muſt

muſt not own; you will there find a better anſwer & in language more befitting your noble ſelf, than you can poſſibly upon any other account expect frō me For though I do not pretend to any skill at Tennis; yet am I very ſenſible, that I muſt not ſuffer, but at my greateſt hazard, ſo much obſequious language, & expreſſions of obliging goodneſſe, to reſt at mee, without returning them to the ſame hand from whence they came: And though I am not able to return them with that grace and dexterity where with they were ſent; Yet I humbly beſeech you to beleeve, that it is not for want of any reality of affection or readyneſſe to ſerve you, that I fall ſhort of what in duty I ow, to one whom I ſo much honour. I muſt confeſſe, I could not without ſome pleaſing content (*neque enim mihi cornea fibra eſt*) ſee my ſelf ſo highly honoured, however undeſerving, by ſo fair a character, though much unlike mee, drawn by ſo brave a hand; (as Ladies who are ſometimes pleaſed in ſeeing their pictures flatter them;) and ſhould bee extreme proud of it (were I not conſcious how little there is in me to anſwere it;) as coming frō ſo gallant a perſon; whoſe authority is able to give credit to his opinion therein.

Thoſe other two Gentlemen whom you are pleaſed to joyn mee with in your good opinion, D. Wilkins and D. Ward; I ſhall, upon their returns hither, acquaint how much they are obliged to you for that honour you put upon them. I can onely at preſent; from thoſe great reſpects which I know they have for you, aſſure you that they are very much your ſervants. And wee muſt all acknowledge ourſelves deeply indebted to M. White, who is pleaſed not onely to judge ſo favourably of us, but to repreſent us to you in ſuch a Character as hath gained us ſo advantagious a place in your opinion.

The probleme to which you refer, of Monſ. Fermat, as a challenge to all the mathematicians of Europe; was that, I ſuppoſe, of which I had from the L. Brouncker a copy, in theſe words,

Invenire cubum qui additus omnibus ſuis partibus aliquotis conficiat quadratū. Exempli gratia, Numerus 343 eſt cubus, a latere 7; omnes ipſius partes aliquotæ ſunt 1, 7, 49, quæ adjunctæ ipſi 343 conficiunt numerum 400, qui eſt quadratus à latere 20. Quæritur alius cubus numerus ejuſdem naturæ.

Quæritur etiam numerus quadratus qui additus omnibus ſuis

partibus aliquotis conficiat numerum Cubum.

Has solutiones expectamus; quas si *Anglia*, aut *Gallia Belgica* & *Celtica* non dederint, dabit *Gallia Narbonensis*, easque in pignus amicitiæ nascentis D. Digby offeret & dicabit.

To which I gave no other solution at the present, but *That the number* 1 *satisfied both his problems.* Subjoining by way of returne, another of the like nature, (which for ought I know may prove as hard as either of his two;) *viz.*

Invenire duos numeros quadratos, qui partibus suis aliquotis additi eandem efficiant summam. Exempli gratia 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31 = 25 + 5 + 1. Inveniantur ejusmodi alii duo.

But I added withall, that I looked upon problems of this nature, (of which it is easy to contrive a great many in a little time,) to have more in them of labour than either of Use or Difficulty.

Since that time I have spent no further thoughts about it. For being just then called from home by the death of a neer friend: Before I got home again I understood that my Lord Brouncker had both resolved those two, and also a latter problem from the same hand, on which I understood that (waving the former inquiry) Mons. Fermat did lay a greater stresse, as more considerable then those former. Which probleme being both received and answered, before I heard ought of it; I conceived it needlesse for mee *actum agere*. What his Lordships solution of this latter probleme was, I am not able to tell, nor so much as what was the probleme; not having any Copy of either. But I know his Lordship so well, and his peculiar dexterity in things of that nature; that I have a very strong presumption of the accurateness of what hee doth in such a way.

That other letter of Mons. Fermat to your self, of which you intimate that I may expect a Copy from M. White, is not yet come at mee; it's possible it may be yet lodged in my L. Brounckers hand, to whom it was first to be communicated. I can onely, for that and all other your noble favours, tender you my very humble thanks, being in no capacity of making any valuable retaliation; your reward being onely the conscience of your own generous inclination to heap favours on those from whom you can expect no recompense,

I shall

I ſhall onely adde a few words and kiſs your noble hands. And 'tis but this; that ſince you have been willing to give your ſelf the trouble, and us the honour, of imparting papers betwixt Monſ. Fermat and my ſelf, I thought it not wholly incongruous to ſubjoine a Theorem, which if it ſhall ſo ſeem good to you, you may tranſmit to him to be demonſtrated; not as a challenge, nor as a matter of any extraordinary difficulty (for I do not take it ſo to bee:) but ſuch as in the ſolution of it may probably ſuggeſt to him (if hee know it not allready) a pretty handſome ſpeculation, which poſſibly may be not unwellcome to him. The Theoreme is this.

Sit Pyramidis vel Coni Fruſtum (parallelis planis abſciſſum;) cujus baſis major æquetur quadrato rectæ A; minor, quadrato rectæ E; altitudo F. Dico. Si cruribus A, E, (vel his æqualibus) conſtituatur angulus graduum 120; & circumſcribatur circulus; Quadratum Radii circuli ſic deſcripti in altitudinem fruſti duſtum, (R q F) æquatur Fruſto.

The Demonſtration of it, or whatever at any time I ſhall bee in any capacity to ſerve you in; you may command at pleaſure from him who accounts it a great honour to be and to bee reputed,

Oxford Sept. 3.
St. Vet. 1657.

Right Noble Sir,

Your affectionate and very humble ſervant

JOHN WALLIS.

EPISTOLA VIII.

D. *Vicecomitis Brouncker, ad* D. *J. Wallis.*

TUam, Vir Clariſſime, quinto hujus ſcriptam heſterno die recepi; ut & illam ad D. Kenelmum Digby, quæ quam maturè potero ad illum tranſmittetur. Quam autem memoras a D. Kenelmo Digby ad D. White miſſam, ut nobis impertiatur, nondum accepi, neque de illa quicquam inaudiveram. Ubi illam accepero,

accepero, tibi transmittendam curabo. Interim en tibi, quam petis, D. Fermatii quæstionem tertiam, meique ad illam responsi summam; (ipsa siquidem verba nescio exhibere, cum eorundem nullum apud me apographum retinuerim:) quod tamen feciſſem si putassem D. White responsum illud eadem forma fuisse transmissurum. Poteris, si tibi videbitur, Latine tandem transmittere, ut non sit cur de Idiomate Anglicano deinceps conquerantur, vel ob illud hæreant. Interea, tum ob nuperos tuos, tum & priſtinos favores, repensis gratiis; certo scias velim, quam tibi sim,

Sept. 11. 1657. *Clariſſime Vir,*

Amicus fideliſſimus, atque
humillime ſervus:
BROUNCKER.

D. *Fermatii Scriptum, hoc erat.*

QUæstiones pure Arithmeticas vix est qui proponat, vix qui intelligat: Annon quia Arithmetica fuit hactenus tractata Geometricè potius quam Arithmetice? Id sane innuunt pleraque & Veterum & Recentiorum volumina. Innuit & ipse Diophantus, qui licet à Geometria paulò magis quam cæteri discesserit, dum Analyticen numeris tantum rationalibus adstringit: Eam tamen partem Geometriâ non omnino vacare probant satis superque Zetetica Vietæa; in quibus Diophanti methodus ad quantitatem continuam, ideoque ad Geometriam porrigitur Doctrinam itaque de numeris integris, tanquam peculiare sibi vendicat Arithmetica patrimonium. Eam apud Euclidem leviter duntaxat in elementis adumbratam; ab iis autem qui secuti sunt, non satis excultam, (nisi forte in iis Diophanti libris quos injuria temporis abstulit, delitescat,) aut promovere studeant ἀειθμητικῶν παῖδες aut renovare. Quibus ut præviam lucem præferamus, Theorema seu Problema sequens, aut demonstrandum aut construendum proponimus. Hoc autem si invenerint, fatebuntur hujusmodi quæstiones nec subtilitate, nec difficultate, nec ratione demonstrandi,

ſtrandi, celebrioribus ex Geometria eſſe inferiores.

Dato quovis numero non-quadrato, dantur infiniti quadrati qui in datum numerum ducti, adſcitâ unitate, conficiant quadratum. Exemplum. Datur 3, numerus non-quadratus; ille ductus in quadratum 1, adſcitâ unitate, conficit 4, qui eſt quadratus. Item idem 3 ductus in quadratum 16, adſcitâ unitate, facit 49, qui eſt quadratus. Et loco 1 & 16, poſſunt alii infiniti quadrati idem præſtantes inveniri. Sed Canonem Generalem, Dato quovis numero non-quadrato, inquirimus. Quæratur, verbi gratia, quadratus, qui ductus in 149, aut 109, aut 433, &c. adſcitâ unitate conficiat quadratum.

EPISTOLA. IX.

D. *Joh. Wallis ad* D. *Kenelmum Digby.*

Nobiliſſime Domine,

POſt nuperas meas ad Te miſſas (Sept. 3. datas,) Accepi ab Honoratiſſimo Domino, D. Vicecomite Brouncker, D. Fermatii Problema ad illum miſſum, cum ipſius ejuſdem ſolutione. Quæ quia (quod ſuſpicaris) fieri poſſit ut D. Fermatio fuerit perperam expoſita, eandem placet hic ſubjungere, unâ cum hiſce Dominationi Veſtræ offerendam.

D. *Fermatii Problema.*

Dato quovis numero non-quadrato, dantur infiniti quadrati qui in illum ducti, adſcitâ unitate, conficiant quadratum. E. G. $2 \times 16, + 1. = 49 = 7 \times 7.$

Quæritur Generalis Canon quo ejuſmodi quadrati reperiantur.

En autem ejuſmodi Canon duplex. Alter D. *Vicecomitis Brouncker.*

Sit N, numerus datus quilibet. (quadratus aut non-quadratus, integer aut fractus:) Q, alius quilibet quadratus (integer aut fractus;) cujus radix R. Sit D, $= Q \sim N$, (duorum Q, N, differentia;) Puta Q-N, vel N-Q.

Canon. Eſt $\frac{4Q}{Dq} \left(= \frac{2R}{D} \times \frac{2R}{D} \right)$ numerus quadratus, qui in N ductus, adſcitâ unitate conficiet quadratum.

D N

$\times \frac{4Q}{Dq^2} + 1. = \frac{4QN+Dq}{Dq}$. Nam $\frac{4QN+Dq}{Dq} =$

$\frac{4QN+Qq-2QN+Nq}{Qq-2QN+Nq} = \frac{Qq+2QN+Nq}{Qq-2QN+Nq} = \frac{Q+N}{Q-N} \times \frac{Q+N}{Q-N}$.

Alius meus; quoad formam processus, paulo universalior; quoad numeros autem inventos, plane idem.

Sit N, numerus datus quilibet. A, quilibet ad arbitrium assumptus: per quem Q, quadratus quilibet, dividatur; quotientem exhibens M. Sit P, numerus quilibet; D, differentia duorum $\frac{M}{4P}A \sim PN$.

Canon. Est $\frac{MA}{Dq}$ numerus quadratus, qui in N ductus, adscita unitate, conficiet quadratum, $N \times \frac{MA}{Dq}, +1. = \frac{MAN+Dq}{Dq}$.

Nam

$$\frac{MAN+Dq}{Dq} = \frac{\frac{MqAq}{16Pq} + \frac{1}{2}MAN + PqNq}{\frac{MqAq}{16Pq} - \frac{1}{2}MAN + PqNq} = \frac{\frac{MA}{4P} + PN}{\frac{MA}{4P} - PN} \times \frac{\frac{MA}{4P} + PN.}{\frac{MA}{4P} - PN}$$

Monendum denique quod solutioni suæ subjunxit D. *Vicecomes. Nempe*

Prioribus duobus D. Fermatii quæsitis, reponendum censuit, non modo numerum 1, sed & (si fractiones admittantur) numerum 1 per cujusvis integri potestatem sextam divisum, utrique quæsito satisfacere; (quippe qui tum quadratus est, tum cubus, & partes aliquotas nullas habet:) Sed & duorum priori satisfacere, non modo numerum 343 (quem innuit D. Fermatius) sed & eundem per cujusvis integri potestatem sextam divisum. Puta $\frac{343}{64}$. Siquidem numerus Fractus, cum partes non alias habeat actuales, quam quæ toti sunt cognomines; non alias habebit partes aliquotas expositus cubus $\frac{343}{64}$, quam $\frac{1}{64}, \frac{7}{64}, \frac{49}{64}$, quæ cū

ipso

ipso $\frac{343}{64}$, conficiunt $\frac{400}{64}$, numerum quadratum.

Habes itaque, Vir Illustrissime, eorum summam quæ dudum de his Problematis responderat Honoratissimus Vicecomes. Id superest, ut siquo pacto rebus tuis molesta fuerit importuna hæc interpellatio, veniam humillimus exorem,

Oxonii Sept.
27. 1657.

Illustrissime Domine,
Observantissimo Tui, Tibique obstrictissimo,
J. WALLIS.

EPISTOLA X.

D. *Vicecom. Brouncker, ad* D. *Joh. Wallis.*

Accepi, Vir Clarissime, inclusas hasce binas literas, quas à D. Kenelmo Digby allatas, tradebat heri D. White. qui & tertias mihi ostendebat, quæ referebant D. Frenicle solvisse unam ex Propositionibus quas inclusæ literæ memorant, (eandem, ni fallor, de qua antehac audivimus, sed nondum videramus,) viz. *Trouver deux nombres cubes dont la Jumme soit egal à deux autres nombres cubes.* Nempe sic;
1729=C9+C10=C1+C12. 4104=C9+C15=C2+C16. 13832=C18+C20=C2+C24. 32832=C18+C30=C4+C32. 39372=C15+C33=C2+C34. 40032=C16+C33=C9+C34. 20683=C19+C24=C10+C27. Verum de posteriore parte propositionis, viz. *Trouver deux nombres Cubes dont la Jumme soit Cube*, nihil dictum est. Perlectis autem hisce quas mitto literis, visum est mihi ultimas tuas ad D. Kenelmum Digby revocare, ni saltem jam nimis serò id velim, (atque in hunc finem ea de re scripsi ad D. White,) ut nempe ejusdem loco plenius responsum habeat ad Fermatii problema, quod jam de solis integris exponit, secus quam pridem fecerat. quid autem mihi de hoc negotio visum sit, brevi accipies, ab

Octob. 3. 1657.

Amico tibi fidelissimo, simul &
devinctissimo servo,
BROUNCKER.

EPISTOLA XI.

D. *Fermatii ad* D. *Kenelmum Digby. quæ, cum ſequente, præcedenti includebatur.*

Monſieur,

I' ay receu voſtre derniere lettre à la veille du départ de M. Borel, qui ne me donne quaſi pas le loiſir de vous faire un mot de reſponſe. Vos deux lettres *Angloiſes* m' ont eſté traduites par un jeune *Anglois*, qui eſt en cette ville, & qui n' à point cognoiſſance de ces matieres; de ſorte que ſa traduction s' eſt trouvé ſi peu intelligible, que je n'y ay peu diſcouvrir aucun ſens reglé; & ainſi je ne puis vous reſoudre, ſi ce mylord à ſatisfaict à mes queſtions, ou non. Il me ſemble pourtant au travers l' obſcurité de cette traduction bourrüe, que l' Autheur des lettres à trouvé mes queſtions un peu trop aiſées; ce qui me faict croire, qu'il ne les a pas reſolües. Et par ce qu'il pourroit equivoquer ſur le ſens de mes propoſitions, j' ay demandé un nombre cube en nombres entiers, lequel adjouſté à toutes ſes parties aliquotes face un nombre quarré. J' ay donné par exemple 343, qui eſt cube, & auſſi nombre entier, lequel ajouſté à toutes ſes parties aliquotes faict 400, qui eſt un nombre quarré. Et par ce que cette queſtion reçoit pluſieurs autres ſolutions, je demande un autre nombre cube en entiers, qui joinct à toutes ſes parties aliquotes face un nombre quarré; Et ſi le Mylord Brouncker reſpond, qu'en entiers il n'y à que le ſeul nombre 343, qui ſatisface à la queſtion, je vous promets, & à luy auſſi, de le deſabuſer en luy en exhibant un autre. Je demandois encore un quarré en entiers, qui joinct à toutes ſes parties aliquotes face un cube. Pour la queſtion propoſée dans l' eſcrit Latin, que je Vous envoyay elle eſt auſſi en nombres entieres. Et partant les reſolutions en fractions (leſquelles peuvent eſtre d' abord fournies à quolibet de trivio Arithmetico) ne me ſatisferoyent pas. Je ſuis avec reſpect,

A Caſtres le 6. Juin 1657.

MONSIEUR,
Voſtre treſhumble, & treſobeiſant ſerviteur,
FERMAT.

EPI.

EPISTOLA XII.

D. *Fermatii ad* D. *Kenelmum Digby.*

Monſieur,

J'ay receu avec joye & ſatisfaction voſtre dernier pacquet, & quand il ne contiendroit autre nouvelle, que celle de voſtre convaleſcence, & du retour de voſtre ſanté, c'eſt un bien ſi grand, & ſi conſiderable pour tous ceux, qui aiment les belles lettres, qu'ils ne peuvent en recevoir un plaiſir mediocre. J'ay receu la copie de la lettre de Monſieur Wallis, que je eſtime comme je dois, & j'advoüe, que ſes figures ſont les meſmes que les miennes; & que ſes concluſions pour leur quadrature ſont auſſy les meſmes; mais ſa façon de demonſtrer, qui eſt fondée ſur induction pluſtoſt que ſur un raiſonnement à la mode d'Archimede, faira quelque peine aux novices, qui veulent des ſyllogiſmes demonſtratifs depuis le commencement juſqu'à la fin. Ce n'eſt pas que je ne l'approuve, mais toutes ſes propoſitions pouvant eſtre demonſtrées *viâ ordinariâ*, *legitimâ & Archimedeâ* en beaucoup moins de paroles, que n'en contient ſon livre, je ne ſçay pas, pourquoy il à preferé cette maniere par notes Algebriques à l'ancienne, qui eſt & plus convainquante, & plus elegante, ainſi que j'eſpere luy faire voir à mon premier loiſir. Je voudrois qu'en ſuite il euſt determine les centres de gravité de ces hyperboles infinies en diſtinguant celles qui en ont, d'avec celles qui n'en ont pas: car tandis qu'il dira, que la choſe luy eſt cognüe, & qu'il n'en à pas voulu charger ſon livre, il ne me perſuadera pas: Et d'autant plus, que la propoſition generalle ſans demonſtration me ſuffira de ſa part; Et je vous reſponds à l'advance, qu'elle ne ſçauroit contenir plus de huict, ou dix lignes. Dés qu'il me l'aura envoyée, je luy fairay part de ma ſpeculation ſur ce ſubject, & de ma façon de demonſtrer.

Pour les queſtions des nombres, j'oſe Vous dire avec reſpect & ſans rien abbattre de la haute opinion, que j'ay de voſtre Nation, que les deux lettres de My Lord Brouncker, quoy qu'obſcures à mon eſgard & mal traduites, n'en contiennent point aucune ſolution. Ce n'eſt pas que je pretende par là renouveller les

jouſtes & les anciens coups de lances, que les Anglois ont autrefois fait contre les Francois. Mais ſans ſortir de la Metaphore, j' oſe Vous ſouſtenir, & à Vous Monſieur, plus juſtement qu' à tout autre, qui excellés aux deux meſtiers, que le haſard, & le bonheur ſe meſlent quelquefois aux combats de ſcience auſſy bien qu' aux autres, Et qu'en tout cas nous pouvons dire, que *non omnis fert omnia tellus.* — Je ſeray pourtant ravi d' eſtre deſtrompé par cét ingenieux et ſçavant Seigneur, & pour luy teſmoigner, que noſtre combat ne ſera point à outrance, je me relaſche dans la queſtion ſuivante, que je m' en vay luy propoſer, de la rigueur de mes premieres queſtions, qui ne vouloyent que des nombres entiers: il me ſuffira, qu' ils ſoyent rationaux à la mode de Diophante. Le nom de cét Autheur me donne l' occaſiõ de Vous faire ſouvenir de la promeſſe, qu' il Vous à pleu me faire de recouvrer quelque manuſcrit de cét Autheur, qui contienne tous les treize livres, & de m' en faire part, s' il vous peut tomber en main. Voicy la nouvelle queſtion ou pour My lord Brouncker, ou pour Mõſieur Wallis, que j' eſcris en Latin ſuivant voſtre ordre.

Datum numerum ex duobus numeris cubis compoſitum dividere in duos alios numeros cubos.

Hanc propoſitionem in quadratis tantùm exequutus eſt Diophantus. In cubis ne tentavit quidem, in iis ſaltem libris, qui ad nos de majore ipſius opere pervenerunt.

Exempli gratiâ proponatur numerus 28. *ex duobus Cubis* 1. *&* 27. *compoſitus, oportet dictum numerum* 28. *in duos alios Cubos rationales dividere, & propoſitionis ſolutionem generaliter præſtare.*

Je conſens, que M. Frenicle l' entreprenne, je ſuis perſuadé, qu' il ne la trouvera pas ſi aiſée, que les autres, que je ſçavois eſtre de ſa juriſ-diction. Je l' eſtime extraordinairement auſſy bien que vous, mais pourtant ce que je m' en vay adjouſter, l' eſtonnera, ſi vous prenés la peine de le luy communiquer. Je luy avois eſcrit, qu' il n'y a qu'un ſeul nombre quarré en entiers, qui joinct au binaire face un cube, & que le dict quarré eſt 25, auquel ſi vous adjouſtés 2, il ſe fait 27. qui eſt cube. Il a peine à croire cette propoſition negative, & la trouve trop hardie & trop generalle. Mais pour augmenter ſon eſtonnement, je dis que ſi on cherche un quarré, qui adjouſté à 4 face un cube, il n' en trouvera jamais que deux en nõbres entiers, ſçavoir 4 & 121; car 4 adjouſte

adjouſté à 4. faict 8, qui eſt cube : & 121 adjouſté à 4 faict 125: qui eſt auſſi cube : mais apres cela toute l'infinité des nombres n'en ſçauroit fournir un troiſieſme, qui ait la meſme propriete.

Je ne ſçay ce que diront vos Anglois de ces propoſitions negatives, & ſi les trouveront trop hardies. J'attens leur reſolution, & celle de Monſieur Frenicle, qui n'a point reſpondu a une longue lettre, que M. Borel luy rendit de ma part; dequoy je ſuis ſurpris, car je luy reſpondois exactement a toutes ſes doubtes, & luy faiſois quelque queſtion de mon chef, dont je attendois la ſolution. Je ſuis avec grand reſpect,

A Caſtres le 15. Aouſt 1657.

MONSIEUR,

Voſtre treſhumble & treſobeïſſant ſerviteur,

FERMAT.

J'oubliois de vous dire, que M. Borel a eſcrit a ſon pere, que M. l'Ambr. de Hollande s'eſtonnoit, dequoy je n'avois pas reſpondu a Schooten qui pretend avoir reſolu mes queſtions, & m'en avoir propoſé d'autres. Mais je vous aſſeure, que je n'ay rien veu de ſa part, & que ſi vous m'en envoyes Copie, j'y reſpondray.

J'ay mis la propoſition un peu plus generalle dans la page ſuivante ou elle me ſemble eſtre mieux. On la peut concevoir pour M. Frenicle, qui aime les nombres entiers en ces termes.

Trouver deux nombres cubes, dont la ſomme ſoit cube : & trouver deux nombres cubes, dont la ſomme ſoit eſgalle a deux autres nombres cubes.

Propoſuit Diophantus datum numerum quadratum in duos quadratos dividere.

Item. Datum numerum ex duobus quadratis compoſitum in duos alios quadratos dividere.

Queſtionem autem ad cubos evehere, nec ipſe, nec Vieta tentavit.

Quidni igitur famoſam propoſitionem, & recentioribus reſervatam analiſtis, expedire aut dubitemus, aut differamus?

Proponatur itaque, datum numerum cubum in duos cubos rationales dividere.

Item.

Item. Datum *numerum ex duobus cubis compositum in duos alios cubos rationales dividere.*

Et *inquiratur*, *quid ea de re* Anglia, *quid* Hollandia *censeat?*

EPISTOLA XIII.

D. *Vicecomitis Brouncker, ad* D. *J. Wallis.*

ID solum indicant Vir Clarissime, præsentes literæ, inclusam quam habes Fermatii chartam a D. White mihi perlatam heri post meridiem, tibi impertiendam, cujus nempe oblitus erat cum reliquæ mitterentur. Petit autem ut tum hæc tum reliquæ, sibi restituantur. Id supereſt ut redamare pergas,

Octob. 6. 1657.

Fidissimum tibi, tuique observantissimum
BROUNCKER.

Remarques sur l' Arithmetique des Infinis du S. J. Wallis.

1. EN son Epistre il declare, comment il s'est mis à la recherche de la Quadrature du Cercle, & dit que quelques verites, qui ont este discouvertes en Geometrie, luy ont donne l' esperance, qu' elle se pourroit trouver. Ces verites sont,

Que la raison des cercles infinis du Cone aux infinis du Cylindre est cognüe, sçavoir celle du Cone au Cylindre, qui a mesme base & hauteur : & pareillement la raison des Diametres des dits Cercles, sçavoir celle du Triangle, qui passe par l' Axe du Cone, au parallelogramme, qui passe par l' Axe du Cylindre.

Comme aussy on a la raison du Conoïde parabolique au Cylindre circõscrit, & celle de la parabole au parallelogramme, qui passent par leurs Axes, qui sont comme l' assemblage des Diametres des Cercles infinis, qui composent les dits solides.

Deplus, qu' on a aussy trouvé la raison des ordonnées tant au Triangle, qu' au Conoide parabolique, ou parabole, qui sont les Diametres des dits Cercles.

D' ou

D' ou il conclud, que puis qu'on a trouvé auſſy la raiſon de la Sphere au Cylindre circonſcrit, ou celle de l' infinité des Cercles paralleles, dont on peut concevoir que la Sphere eſt compoſée, à pareille multitude de ceux qui ſe peuvent feindre au Cylindre; on pourra auſſy eſperer de pouvoir deſcouvrir la raiſon des ordonnées en la Sphere, ou au Cercle, à celle du Cylindre, ou quarré, ſcavoir la raiſon des Diametres des Cercles infinis, qui compoſent la Sphere, aux Diametres des Cercles du Cylindre; ce qui ſeroit avoir la quadrature du Cercle.

Mais de meſme qu'on ne pourroit pas avoir la raiſon de tous les Diametres pris enſemble des Cercles, qui compoſent le Cone, à ceux du Cylindre circonſcrit, ſi on n' avoit la Quadrature du Triangle: non plus que la raiſon des Diametres des Cercles qui compoſent le Conoïde parabolique, à ceux qui font le Cylindre circonſcrit, ſi on n' avoit la Quadrature de la Parabole. Ainſy on ne pourra pas cognoiſtre la raiſon des Diametres de tous les Cercles, qui compoſent la Sphere, à ceux des Cercles, qui compoſent le Cylindre circonſcrit; ſi on n' a pas la Quadrature du Cercle. Car de demander la raiſon, qu' il y à entre les Diametres de tous les Cercles Paralleles, qu' on peut concevoir en la Sphere (leſquels Diametres pris tous enſemble, ne ſont autre choſe, qu' un Cercle) & ceux des Cercles, qu' on peut feindre au Cylindre circonſcrit (leſquels ſont un quarré circonſcrit audit Cercle) cela n' eſt autre choſe, que de demander la raiſon du Cercle au Quarré circonſcrit.

2. En la meſme Epiſtre apres avoir poſé une ſuite de nombres, ſçavoir 1. 6. 30. 140. 630. il demande le terme moyen, qui doit eſtre mis entre 1 & 6. Je reſponde, que ſi on à eſgard à la ſuite entiere des dits nombres, on ne peut poſer aucun terme moyen entre les dits 1 & 6. pource qu' en cette ſuite les nombres ne ſont pas une proportion continuë; mais en autant de façons, que l' un eſt cõparé à l' autre, autant ſont il de proportions differentes, de ſorte que ce ſont pluſieurs proportions, ou progreſſions déſjoinctes, & ainſy quand on prendroit un terme moyen entre 1 & 6. il n' auroit rien de commun avec les autres nõbres.

Toute la proportion ou ſuite, qu' on peut remarquer en ces nombres, conſiſte au raport, qu' ont entre eux les nombres, dont ils proviennent par multiplication, aux quels on voit une eſpece

de progreſſion Arithmetique; neanmoins ne ſçauroit paſſer au nombres ſuſdits en telle ſorte que par iceluy on puiſſe donner un terme moyen entre deux des nombres, qui ait correſpondance à toute la ſuite: au contraire la proprieté meſme de cette progreſſion faict, qu'il n'y en peut avoir. Voicy comment.

Les nombres donnés 1. 6. 30. 140. 630. ſont produis par les ſuivans en multipliant, $1, 4\frac{2}{1}, 4\frac{2}{2}, 4\frac{2}{3}, 4\frac{2}{4}$. ou les equivalens $1, \frac{6}{1}, \frac{10}{2}, \frac{14}{3}, \frac{18}{4}$.

En ces nombres, qui ſervent à faire les donnés, il eſt facile à voir, ou eſt le raport: Il conſiſte aux premiers, en la ſeule augmentation du denominateur de la fraction, qui y eſt joincte; ce qui fait diminüer les nombres d'autant plus, qu'ils s'eſloignent du premier terme, ſçavoir de 1. & aux 2des 1. $\frac{6}{1}$. $\frac{10}{2}$. &c. (qui ſont les meſmes en autres termes) les numerateurs des fractions augmentent de 4, & les denominateurs de l'unite, ce qui fait pareillement diminüer les nombres, tant plus la progreſſion avance; en ſorte que celluy, qui eſt le plus proche du premier, terme 1, ſçavoir $4\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$. qui vaut 6. eſt le plus grand de tous.

Il faut auſſy remarquer, que le raport des nombres de la dite progreſſion n'arrive pas juſques au premier terme 1. ou pluſtoſt ne commence pas des le 1er. terme, mais au ſecond ſeulement, qui eſt ſa borne; De ſorte que ſi on vouloit augmenter les termes de la dite progreſſion, en la changeant & mettant un nombre moyen entre le 1er & le 2nd terme, ſçavoir entre 1 & $4\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$, il ne faudroit pas avoir eſgard à 1, mais aux autres nombres $4\frac{2}{1}, 4\frac{2}{2}, 4\frac{2}{3}, 4\frac{2}{4}$. ou à ces autres: qui ſont les meſmes $\frac{6}{1}, \frac{10}{2}, \frac{14}{3}, \frac{18}{4}$. car cette progreſſion n'auroit pas de ſuite, ſi on la commencoit par 1.

Puis donc qu'il ne faut pas avoir eſgard au 1er terme 1, qui n'a rien de commun avec les nombres de la dite progreſſion; mais aux autres ſeulement; & qu'ils augmentent à meſure qu'ils approchent du 1er terme 1. il s'en ſuit, que le nombre, qu'on prendroit entre 1 & $4\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$ ſeroit plus grand, que ledit $\frac{6}{1}$. ou 6. & il faudroit multiplie, le 1er terme 1, par ce nombre moyen, qui ſeroit plus grand que 6, pour avoir le moyen terme entre les deux premiers des nombres premierement donnes, qui ſont 1 & 6. (car les dits nombres donnes 1. 6. 30. 140. 630. n'ont point d'autre raport ou liaiſon, que celle, qu'ils empruntent de leurs multipli-

multiplicateurs, autrement ils n' en ont aucune) & ainsy on auroit un nombre plus grand que 6, pour le moyen terme d' entre 1, & 6. qui est absurde.

De la s' ensuit, qu' on ne peut donner le moyén terme entre 1 & 6, en tant qui sont compris en la suite ou progression des nombres 1. 6. 30. 140. 630.

On peut inferer dela, que la ligne courbe VC, n' est point esgalle en elle mesme, & qu' elle ne peut provenir d' aucun mouvement continu, qui soit esgal ou reglé; mais de plusieurs differens, suivant ses parties; & que c' est une ligne composée de portions de plusieurs courbes compriſes entre les paralleles à l' axe VX de la figure: car en icelle il est bien necessaire, que la moyenne ligne tirée entre la 1ere & la 2de paralleles, sçavoir entre 1 & 6, soit moindre que 6. mais outre que cette moyenne ligne seroit de differente longueur suivant la nature & la propriete de cette portion de la courbe VC, qui n' a rien de commun avec les autres portions, comme a este dit; elle n' auroit raport qu' avec les 2, termes, 1. 6. & non pas avec les autres, ny avec les moyennes, qu' on auroit tirées entre deux, si on prenoit le tout conjoinctement.

3. En la 1ere propoſ. le dit Sr. Wallis propoſe une ſuite de quantites commenceans par 0, (qui repreſente le point) & qui ſe ſuivent en progreſſion Arithmetique; & cherche quelle raiſon il y a entre la ſomme des dites quantites, & la ſomme d' autant de termes eſgaux a la plus grande des données.

Le moyen qu' il donne pour trouver cette raiſon eſt de prendre les ſommes de diverſes quantites de nombres commençeans par les moindres; puis comparer les raiſons les unes aux autres, & inferer de la une propoſition univerſelle.

On ſe pouvoit ſervir de cette methode, ſi la demonſtration de ce qui eſt propoſe eſtoit bien cachée; & qu' au paravant de s' engager a la chercher on ſe voulu aſſeurer à peu pres de la verite: mais il ne s' y faut fier que de bonne ſorte, & on y doibt apporter les precautions neceſſaires; car on pourroit propoſer telle choſe & prendre telle regle pour la trouver, qu' elle ſeroit bonne à pluſieurs particuliers, & neanmoins ſeroit fauſſe en effect, & non univerſelle; de ſorte qu' il faut eſtre fort circonſpect pour s' en ſervir; quoy qu' y apportant la diligence requiſe elle puiſſe eſtre

fort utile, mais non pas pour prendre pour fondement de quelque ſcience, ce qu'on en aura deduit; comme faict le Sieur Wallis; car pour cela on ne ſe doibt contenter de rien moins, que d'une demonſtration, & principalement au ſaject de la propoſition, dont il s'agit; dont la ſolution & demonſtration eſt fort facile.

Voicy, comme on demonſtrera, que les dites quantites propoſées, eſtans joinctes enſemble, font la moitie d'autant de quantites eſgales à la plus grandes d'icelles.

Soyent expoſées des quantites ou nombres, qui commencent par le point, ou par o. et qui ſe ſuivent en progreſſion Arithmetique, & ſoyent celles de la 1re ligne.

1. *o a, b. c. d.* Quantités données.
2. *d. d. d. d. d.* Quantités eſgalles à la plus grande des données,
3. *d. c. b, a. o.* Exces des plus grandes par deſſus les données.

Puiſque les quantites données ſont en progreſſion Arithmetique, le 3me terme *b.* ſurpaſſera le 2nd de pareille quantite, que le 2nd (ſçavoir *a.*) ſurpaſſe le 1er qui eſt o; mais l'exces de *a* par deſſus o eſt *a*; & partant toutes ces quantites ſe ſurpaſſeront l'une l'autre de proche en proche, ſelon la quantite du 2nd terme *a*. Et ſi on prend les quantites de 2 en 2, laiſſant une d'icelles entre deux, comme ſont *a, c*, ou *b, d*, de la premiere ligne; leur difference ſera le 3me terme, comme il eſt evident: & de meſme ſi on les prenoit de 3, en 3; elles auroyent le 4me terme *c*, pour leur difference.

De la il s'enſuit, que ſi on prend autant de termes eſgaux au plus grand terme *d*, des quantites données, comme en la 2de ligne; leur exces par deſſus les quantites donées ſera eſgal aux dites quantites données; comme on voit en la 3me ligne. Car l'exces de *d*, par deſſus la plus grande des quantites données, ſçavoir par deſſus *d*, eſt o, qui eſt le premier terme des quantites données; l'exces du meſme *d*, par deſſus le terme precedant *c*, eſt le 2d terme *a*, comme il a eſte monſtre; ſçavoir pour ce que les 2 quantites *c* & *d*, ſont prochaines: & enſuite l'exces du *d*, par deſſus *b*, ſera *b*; & ainſy des autres; juſques à ce, qu'en fin eſtant au premier terme o, l'exces de *d*, par deſſus iceluy ſera le meſme *d*: & ainſy la ligne des exces, qui eſt la troiſieſme, ſera eſgale à la 1ere qui contient les quantites donnees. Mais la 1ere

&

& la 3me ligne eſtant joinctes enſemble ; ſcavoir les quantites donnees, eſtant joinctes aux exces des quantités de la 2de ligne par deſſus celles de la 1ere, qui ſont les donnees, font ladite 2de ligne, qui a chacun de ſes termes eſgal au plus grand de ceux de la 1ere, partant la 2de ligne, ou le plus grand terme des donnees, pris autant de fois, qu' il y a de termes, ſera double de la 1ere ligne c' eſt à dire des quantites données. Ce qu' il falloit demonſtrer.

4. En la ſeconde propoſition il requiert, que le 1er terme ſoit 0, & le 2d 1. autrement il dit que *moderatio eſt adhibenda.*

A cela je dis, que ſi on commence par 0, quelque nombre, qu' on mette pour le ſecond terme, la ſomme d' autant de fois le plus grand terme ſera tousjours double des quantités données ; car ſi pour *a, b, c, d*; on prend quelque nombres, qu' on voudra, qui ſoyent en progreſſion Arithmetique depuis le 1er terme 0, cela ſuccedera tous jours en la meſme ſorte ainſy qu' il a eſté cy devant demonſtré.

EPISTOLA XIV.

D. *Vicecomitis Brouncker ad* D. *Joh. Wallis.*

Clariſſime Vir,

POſt acceptas D. Fermatii literas, quas ad te nuper tranſmiſi, quæ Problema, pridem propoſitum, de ſolis integris exponunt; rem aliquatenus expendens, quadratos quos quærit infinitos (qui in datum non-quadratum ducti adſcitâ unitate quadratos conficiant) in hujuſmodi ſeriem video concidere. Nempe

$2\times Q: 2\times 5\frac{1}{1}\times 5\frac{2}{4}\times 5\frac{2\,9}{1\,5}\times 5\frac{1\,6\,9}{2\,9\,4}\times$ &c.

ſic $8\times Q: 1\times 5\frac{1}{1}\times 5\frac{1}{6}\times 5\frac{2\,9}{1\,5}\times 5\frac{1\,6\,9}{2\,9\,4}\times$ &c.

ſic $18\times Q: 4\times 33\frac{1}{1}\times 33\frac{1\,2}{3\,6}\times 33\frac{1\,1\,2\,1}{1\,1\,5\,2}\times$ &c.

$32\times Q: 3\times 33\frac{1}{2}\times 33\frac{1\,2}{3\,6}\times 33\frac{1\,1\,2\,1}{1\,1\,5\,2}\times$ &c.

$3\times Q: 1\times 3\frac{1}{1}\times 3\frac{2}{4}\times 3\frac{1\,1}{1\,5}\times 3\frac{6\,1}{3\,6}$ &c.

$\bar{12} \times Q : \bar{2} \times 13\frac{1}{1} \times 13\frac{13}{14} \times 13\frac{181}{195} \times$ &c.

$27 \times Q : 5 \times 51\frac{1}{1} \times 51\frac{51}{52} \times$ &c.

$48 \times Q : \bar{1} \times 13\frac{1}{1} \times 13\frac{13}{14} \times 13\frac{181}{195} \times$ &c.

$75 \times Q : 3 \times 51\frac{1}{1} \times 51\frac{51}{52} \times$ &c.

$5 \times Q : 4 \times \bar{17}\frac{1}{1} \times 17\frac{17}{18} \times 17\frac{305}{323} \times$ &c.

$20 \times Q : 2 \times 17\frac{1}{1} \times 17\frac{17}{18} \times 17\frac{305}{325} \times$ &c.

$80 \times Q : 1 \times 17\frac{1}{1} \times 17\frac{17}{18} \times 17\frac{305}{323} \times$ &c.

$6 \times Q : 2 \times 9\frac{1}{1} \times 9\frac{9}{10} \times 9\frac{89}{99} \times 9\frac{881}{980} \times$ &c.

$24 \times Q : 1 \times 9\frac{1}{1} \times 9\frac{9}{10} \times 9\frac{89}{99} \times 9\frac{881}{980} \times$ &c.

$96 \times Q : 5 \times 97\frac{1}{1} \times$ &c.

Ubi fractionis cujusq; numerator æquat denominatorem suum dempto denominatore proxime præcedente; Denominator vero numeratorem æquat termini proxime præcedentis in impropriã fractionem reducti. Cognitâ vero serie quæ ad numerum aliquem non-quadratum attinet, habetur inde series quæ spectet istius non-quadrati multiplum per quemvis quadratum; scilicet dividendo seriem inventam per radicem quadrati multiplicantis. Primores autem duo termini cujusque seriei reperiendi sunt vi Canonis nostri generalis $\frac{4Q}{Dq}$; Nempe, quoties Dq est aliquota pars numeri 4Q, (sive D aliquota pars 2R,) habetur integer quadratus rem absolvens. Hoc est, (substituendo $\frac{a^2}{e^2} = Q$, adeoque $\frac{a}{e} = R$, et propterea $D = Q \sim N = \frac{a^2}{e^2} \sim N'$) quoties $\frac{a^2}{e^2} \sim n = D$ est aliquota pars numeri $\frac{2a}{e} = 2R$; vel (ductis utrisque in e^2) quoties $a^2 \sim n e^2$ est aliquota pars numeri $2ae$. Eo itaque jam redacta est quæstio, ut reperiatur quadratus aliquis qui in datum non-quadratum ductus, ab alio aliquo quadrato differat

differat aliquotâ parte dupli rectanguli sub radicibus. Quod inductione commode institutâ investigari poterit. Hæc sunt quæ de hoc negotio jam occurrunt,

Octob. 22. 1657. *Vir Clarissime,*

Amico tuo fidelissimo, atque observantissimo,

BROUNCKER.

EPISTOLA XV.

D. *Joh. Wallis ad* D. *Vicecom. Brouncker.*

EN Tibi tandem, Vir Illustrissime, quæ post reditum meum, cum hinc per aliquod tempus (uti nosti) abfuerim, visum est in summam redigere, ad D. Fermatii Animadversiones & Epistolas reponenda; quæ, si D. V. videbitur, ad Illustrissimum Digbæum, cui inscribuntur, possis transmittere. Ne autem mireris *hîc omissa quædam, aut vitio vertas, quæ non minoris momenti videantur, forsan etiam majoris, quam quæ hic habentur nonnulla; hoc ideo factum est, tum ne in volumen excresceret Epistola, tum quia non omnia simul prodere, necessum duxi. *In Epist. æqu.

Reticere itaque visum est (ut à tuis incipiam) seriem illam radicum, quam exposuit mihi tua nupera epistola, *Oct.* 22. conscripta tum scilicet cum in procinctu eram hinc abiturus. Non quod eam ullatenus negligendam putaverim, sed acuminis plenam (uti tua solent semper esse) & sagaci tuo ingenio dignam. Sed quia quæ fine illâ hic habentur, rem illam videntur satis absolvere; (non enim quadratos omnes postulat problema, sed saltem infinitos;) atque hanc ipsam seriem, commodius forsan deinceps aliquando exhibendam judico. Ne tamen putet Fermatius existimâsse nos, quos hîc docemus quadratos infinitos exhibere, omnino omnes esse quæ exhiberi possent; huic cavendum esse duxi, plures adhuc, si plures postulet, pollicendo.

Placuit item reticere methodos, tum tuas tum & meas, quadratum primum, sive ipsius radicem, per inductionem exhibendi; tum quia,

quia, de Infinitis exhibendis, videbatur mihi problematis pars longe potior, tum præsertim quia videbam vix posse methodos illas, ita ut ab aliis commode intelligantur, perspicue tradi, sine longiori verborum & exemplorum apparatu quam ferre posse videbatur hæc epistola. Sin de hoc hæreat Fermatius, seorsim possumus deinceps exhibere *. Interim illud generatim dixisse sufficiat, hoc saltem spectandum esse, ut $D = N \sim Q$ sit aliquota pars numeri 2 R; sive $na^2 \sim e^2$, numeri 2 *ae*. Quippe tum, quadrati per Canones nostros exhibiti, futuri sunt integri.

* *Id factum est* Epist. XVII.

Centrum gravitatis quod spectat, quod scilicet à me exegit Fermatius; eorum quæ tibi antehac exposui de hoc negotio, multa deesse vides. Et quâ prius universalius exposueram propositionem, jam arctius hic habes expositâ, ut illud saltem exhibeat quod petebatur; nempe centrum gravitatis in Fermatii (ut loquitur) *Hyperbolis Infinitis*, eodem situ quo eas ipse exponit. Omissis, tum quæ centrum gravitatis in Parabolis & Paraboloidibus omne genus spectabant, (quod non petebatur;) tum quæ idem in Hyperbolis illis alio situ positis spectant, tum & in semiparabolis aut semiparaboloidibus ut & Semihyberbolis ejusmodi infinitis *. Quod fecimus, tum ne nimius essem in iis exabundanti exponendis quæ præter postulatum erant, tum quia potius videbatur eadem Fermatio prius problematixῶς exhibere: ut quæ quæsitis suis nihilo mihi videntur inferiora.

* *Vide infra, post* Epist. XVI.

Cæterum totum hoc quicquid est, vestro etiamnum arbitrio permitto; ut si vel addendum vel immutandum quidquam putaveris, id præstet insuper,

Oxoniæ Novemb. 21. 1657.

Illustrissime Domine,

Humillimus Tibi servus, ad obsequendum paratissimus,

J. WALLIS.

EPI.

EPISTOLA XVI.

D. *Joh. Wallis ad* D. *Kenelmum Digby. præcedenti inclusa.*

Nobilissime Domine,

POst nuperas meas ad te literas, mense Septembri datas, adeptus sum ab Honoratissimo D. Brouncker, ipsius Problematum Fermatianorum solutiones. Quibus inspectis, abunde confirmatus sum in ea sententia, quam in præteritis ad Te literis indicabam. Quicquid enim sit de literis quas Fermatio fuisse perperam expositas insinuabas, (quas nec vidi unquam, nec scio quales fuerint;) Solutiones saltem eas esse comperio quæ quæsitis accuratissimè respondent. Eas itaque libuit statim Latino Idiomate ad Te transmittere, necui deinceps interpretatio prava fraudi sit. Atque id quidem fecerim repetitis ad Te literis eodem mense datis; sed quas, ob Fermatianas postea receptas, revocabam, ut ad ea quæ in his de novo suggeruntur simul respondeam.

Accepi utique sequente Octobris mense, a Dominatione vestrâ transmissas binas D. Fermatii ad Te literas, alteras Junii 6, alteras Augusti 15, datas. Nec ita multo post ipsius in meam Infinitorum Arithmeticam Animadversiones: Adeo Tu me novis perpetuo cumulas beneficiis. Cum verò nec ulla mihi spes superfit, quibus me devinctum tenes, beneficiorum vinculis me eximendi; nec aliud mihi restet quò me recipiam refugium præter Clementiam vestram; quam itaque oratam velim (id quod unicum habeo) humillimas ob tantum in me favorem gratias acceptare, atque eodem me, immerentem licèt, affectu prosequi, quo in me hactenus usus fueris: non te prolixâ detinendum censui præfatione, sed ad ea me protinus accingendum quæ dicenda postulant illæ literæ, ubi prius importunæ meæ loquacitatis, qua majoribus occupatum negotiis interpellem, veniam exoravero.

Conqueritur Fermatii Epistola prior, difficultatem assequendi quid velit Honoratissimus Vicecomes, in suâ problematum solutione, ob male traductas ex Idiomate Anglicano literas. Id autem ne ulterius conqueratur, Idiomate Latino, quod traductione non

intelligat, te compellandum jam censui, si tibi forte & hasce literas eidem communicandas Ipsum fuerit.

Dum vero, quantum ille (ut ait) per obscuræ translationis nebulas assequi valet, existimat ab Honoratissimo Domino Problemati suo minime satisfactum esse: Ego planè contrarium censeo, nec, nisi forsan quod ipsius solutionem nondum satis intelligat, nihil quicquam esse cur id vel dubitet vel dissimulet.

Problema primum geminum erat.

Invenire cubum, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat quadratum. Exempli gratiâ; Numerus 343 est cubus à latere 7; omnes ipsius partes aliquotæ sunt 1, 7, 49, quæ adjunctæ 343, conficiant numerum 400, qui est quadratus à latere 20. Quæritur alius cubus numerus ejusdem naturæ.

Quæritur etiam numerus quadratus, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat numerum cubum.

Huic ego Problemati responderam, *Numerum* 1, *utrique quæstio satisfacere*; ut qui tum quadratus est, tum cubus, & partes aliquotas nullas habet.

Huic solutioni subjunxit D. Vicecomes Brouncker, *Id ipsum* præstare (si fractiones admittantur) tum *numerum* 1, *per cujusvis integri potestatem sextam divisum*; tum etiam, quod ad duorum quæsitorum prius, *numerum* 343, *sic divisum*: puta $\frac{343}{64}$ Siquidem numerus fractus, cum partes non alias habeat actuales, quam quæ toti sunt cognomines; non alias habebit partes aliquotas expositus cubus $\frac{343}{64}$, quam $\frac{1}{64}$, $\frac{7}{64}$ $\frac{49}{64}$, quæ cum ipso $\frac{343}{64}$, conficiunt $\frac{400}{64}$ numerum quadratum lateris $\frac{20}{8}$.

Cum verò jam tandem se exponit Fermatius, non alium sibi quam numerum integrum satisfacere: Etiam sic sibi satisfactum esse non erit diffitendum. Quippe (præter numerum 343 in problemate expositum) non nisi *unum* postulat, nec nisi *unum* seipsum exhibiturum suscipit, [*Je demande un autre* &c; *& s'il respond qu'en entiers, il n'y à que le seul nombre* 343, *je vous promets de le desabuser en luy en exhibant un autre*;] hujusmodi autem unum nos exhibuimus integrum, nempe ipsum 1.

Cur plures non exhibeam, ratio est, non quòd existimem alium nullum esse, sed quia nec ipse plures postulat, nec ego rem ipsam tanti

tanti esse judico (nam cui bono?) ut solicitâ videatur indagatione digna; nedum ut ad id negotii se tota tum *Anglia*, tum *Gallia Celtica* & *Belgica*, (quos simul omnes nominatim provocat,) se totos convertant. Non utique majoris momenti est (uti mihi saltem videtur) quam si ego pari ostentatione, exhibitis duobus numeris quadratis, (16 & 25,) qui omnibus sui partibus aliquotis additi eandem efficiant summam, (16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31 = 25 + 5 + 1,) istiusmodi duos alios quadratos exhibendos, peterem. Cui solvendo accingat se, si velit, Fermatius; vel, si malit, negligat: non enim ego inquisitionem hanc tanti puto, ut vel illum exinde peritiorem esse judicavero si solverit, vel secus si minus.

Alterum Problema sic expositum est.

DAto quovis numero non-quadrato, dantur infiniti quadrati, qui in datum numerum ducti, adscitâ unitate conficiant quadratum. Exemplum; datur 3 numerus non-quadratus, ille ductus in quadratum 1, adscita unitate conficit 4, qui est quadratus; item idem 3 ductus in quadratum 16, adscita unitate, facit 49, qui est quadratus; & loco 1 & 16, possunt alii infiniti quadrati idem præstantes inveniri. Sed Canonem generalem, dato quovis numero non-quadrato, inquirimus.

Hujusmodi Canonem hunc adhibuit D. Vicecomes Brouncker, demonstratione sua firmatum. Sit N, numerus datus quilibet, (quadratus, vel non-quadratus; integer vel fractus.)

Q, alius quilibet quadratus, (integer aut fractus,) cujus radix R.

$D = Q \sim N$; duorum Q, N, differentia. Puta Q-N, vel N-Q.

Canon. Est $\frac{4Q}{Dq}\left(=\frac{2R}{D}\times\frac{2R}{D},\right)$ numerus quadratus, qui in N ductus, adscita unitate, conficiet $N\times\frac{4Q}{Dq}, + 1. =$

$= \frac{4QN+Dq}{Dq}$, numerum quadratum. Nam $\frac{4QN+Dq}{Dq} =$

$$= \frac{4QN+Qq-2QN+Nq}{Qq-2QN+Nq} = \frac{Qq+2QN+Nq}{Qq-2QN+Nq} = \frac{Q+N}{Q-N}\times\frac{Q+N}{Q-N}.$$

 Alium

Alium item de meo libuit adjicere; qui quoad modum processus, sit paulò adhuc generalior; quoad rem ipsam, idem cum eo qui præcessit, demonstratione pariter firmatum.

Sit N, *Numerus datus quilibet.*

A, *Quilibet ad arbitrium assumptus.* Per quem

Q, *Quadratus quilibet dividatur;* sitque

M, *Divisionis istius quotiens.* A] Q (M.

P, *Numerus quilibet.*

D, *Differentia duorum* $\frac{M}{4P}A \sim PN$.

Canon. Est $\frac{MA}{Dq}$ numerus quadratus, qui in N ductus, adscita unitate, conficiet $N \times \frac{MA}{Dq} \ddagger 1. = \frac{MAN+Dq}{Dq}$, numerum quadratum. Nam

$$\frac{MAN+Dq}{Dq} = \frac{MAN \ddagger \frac{Mq}{16Pq}Aq - \frac{1}{4}MAN \ddagger PqNq}{\frac{Mq}{16Pq}Aq - \frac{1}{4}MAN \ddagger PqNq} =$$

$$= \frac{\frac{Mq}{16Pq}Aq + \frac{1}{4}MAN \ddagger PqNq}{\frac{Mq}{16Pq}Aq - \frac{1}{4}MAN \ddagger PqNq} = \frac{\frac{M}{4P}A \ddagger PN}{\frac{M}{4P}A \sim PN} \times \frac{\frac{M}{4P}A \ddagger PN.}{\frac{M}{4P}A \sim PN}$$

Horum utrumlibet assumat Canonem Fermatius, manifestum est rem imperatam præstari. Sin plures adhuc desideret, sponde-mus ei quot volet: sed qui jam exhibitis coincident; ut qui suppeditant non modo quadratos infinitos, sed & possibiles omnes, rem imperatam præstantes.

Verum interim monendus est, limitationem illam, de numero dando *non-quadrato*, prout jam proponitur quæstio, supervacaneâ esse; nam & de numeris quadratis non minus procedit Canon, quâ de non-quadratis. Sed et eâdem facilitate res succederet si dixisset universaliter, *adscito numero quovis quadrato*, atque *adscita unitate*; id siquidem solum supereesset insuper faciendum, nempe numerus quadratus per præcedentes canones inventus ducendus esset in adscis-

adſciſcendum illum quadratum. Puta, ſi quadratus ille adſciſcendus ſit Bq; in canone priore, pro $\frac{4Q}{Dq}$, ſumendum eſſet $\frac{4BqQ}{Dq}$; in poſteriori pro $\frac{MA}{Dq}$, ſumendum eſſet $\frac{MABq}{Dq}$. Nam & ſic eſſet, tum illic $\frac{4QNBq}{Dq}$ + Bq, tum hic $\frac{MANBq}{Dq}$ + Bq, numerus quadratus.

Atque hæc ea ſunt quæ in illa quam innuebam Epiſtola, indicaturus eram. Eam verò revocandam cenſui propter ea quæ jam tandem ſuggerit Fermatius; quæ faciunt ut dictis adjiciendum nonnihil videatur, ob novam quam adhibet limitationem, in quæſtione ut pridem propoſitâ minime memoratam. Nempe jam, Se ſolos quadratos *integros* voluiſſe dicit, non item fractos: in Fractionibus ſiquidem ſolutiones tam in procinctu eſſe ut à quolibet de trivio Arithmetico ſuppeditari poſſint.

Bene utique res eſt, quod jam tandem perſentiſcat Nobiliſſimus Vir, quæſtionem illam ſuam, (quam non ita pridem, ideo ſaltem ab Honoratiſſimo Vice-Comite non ſolutam judicaverit, quod non difficilis haberetur,) eam interim eſſe quam *quilibet de trivio Arithmeticus* facile ſolvat. Quanquam interim dubitare ſubit, num Fermatius ipſe, nedum quilibet de trivio Arithmeticus, ante expoſitos noſtros Canones, Canonem generalem ſciverit, qui non modo quadratos infinitos, ſed & poſſibiles omnes tum integros tum item fractos exhiberet; eumque talem eſſe noverit demonſtrare.

At verò hic, neſcio annon merito queri liceat, nobiſcum haud bene actum eſſe. Quippe de Integris, ne χῦ quidem in expoſitâ quæſtione dictum eſt; neque erat unde illam ita intelligendam eſſe hariolemur. Cum enim in longa quam præmiſerat præfatione, Diophantum laudaverit, ejuſque quæſtiones Arithmeticas ſi non prætulerit, æquiparavit ſaltem aliorum Geometricis quæſitis, ſeque in expoſita quæſtione imitatum eſſe Diophantum profiteretur, apud quem per *numeros quadratos* nuſquam non intelliguntur promiſcue tum integri tum fracti; ecquis quæſo (qui Diophantum vel per tranſennam inſpexerit) ſuſpicari poſſet, vel,

præter integros, quadratos esse nullos; vel, de solis integris, quæstionem sic propositam, intelligendam esse. Solvimus itaque quæstionem propositam prout verba sonant eoque sensu quo plane debuerunt intelligi: neque errore nostro factum est quod ille, si solos integros intenderat, non & sic loquutus sit.

Quoniam vero de integris jam illam proponit quæstionem, quam de quadratis simpliciter, proposuerat prius; (hoc est, solutâ quæstione illâ, novam proponit) Etiam & hic illum sequi lubet. Aggrediemur itaque hoc —— Alterum Problema.

Idem in Numeris integris præstare.

Dicimus autem quæstionem sic limitatam minus universalem esse quam ut prius; Et saltem ad numeros datos non-quadratos (quod & Fermatius facit) restringendam esse, primâ statim fronte patet. Si enim tum N, tum $\frac{4Q}{Dq}$, sint numeri quadrati integri, erit & $\frac{4QN}{Dq}$ quadratus integer, cum itaque & $\frac{4QN}{Dq}+1$ quadratus esse debeat, duo essent numeri quadrati integri qui nonnisi unitate ab invicem distarent; quod fieri neutiquam posse constat.

Quo autem casu res possibilis est; exhibent nostri Canones, non quidem *solos*, at saltem *omnes* quadratos integros. Exhibent utique possibiles omnes tũ integros tum fractos huic negotio accommodos, quod ne gratis dixisse videar, sic demõstro. Esto quadratus ille quicunque rem præstans, Fq; erit itaque $NFq+1=Lq$: numerus quadratus. Sumpto jam $R=\frac{L\mp 1}{F}$, erit, inquam, $Fq=\frac{4Q}{Dq}$ quem supratraditus Canon exhibet. Erit enim $Q=Rq=\frac{Lq\mp 2L+1}{Fq}$, Sed & $NFq+1=Lq$, adeoque $Lq-1=NFq$, & $\frac{Lq-1}{Fq}=N$. Et propterea $D(=Q:N)=\frac{Lq\mp 2L+1}{Fq}:\frac{Lq-1}{Fq}=\frac{2L\mp 2}{Fq}$; adeoque (quia

$2R = \frac{2L+2}{F}$) erit $\frac{2L+2}{Fq}$) $\frac{2L+2}{F}$ ($F = \frac{2R}{D}$: hoc est $Fq = \frac{4Q}{Dq}$. Exhibet igitur expositus Canon, quadratum Fq; hoc est, quadratum ex iis qui rem præstent imperatam quemlibet. (Atque idem eodem fere modo, mutatis mutandis, ex altero etiam canone inferetur.)

Exhibet itaque Canon expositus infinitos numeros quadratos rem imperatam præstantes, & quidem, quo casu res est possibilis (nempe si expositus numerus sit non-quadratus) infinitos quadratos integros. Id saltem superest, ut fit $\frac{4Q}{Dq} = Fq$ numerus integer, atque ut istiusmodi exhibeantur infiniti. Hoc autem ut fiat, ex infinitis quos Canon exhibet, seligatur ad arbitrium unus aliquis integer quadratus rem præstans (vel etiam alio quocunque modo reperiatur;) hujus, inquam, unius ope exhibebimus alios infinitos hac methodo. Sit ille, verbi gratia, Fq; adeoque $NFq + 1 = Lq$; Erit $2FL$, radix alterius quadrati rem præstantis: atque eodem modo, ex cognito secundo, invenietur radix quadrati tertii; & sic quarti, quinti, &c. in infinitum. Exempli gratia. Quia numerus 3, in quadratum 1 ductus, adscita unitate facit quadratum, puta $3 \times 1, + 1 = 4$. duplum rectangulum sub 1 & 2 (radicibus quadratum 1 & 4) nempe $2 \times 1 \times 2 = 4$, est radix novi quadrati 16 rem præstantis. Et quia $3 \times 16, + 1, = 49$. erit $2 \times 4 \times 7 = 56$ radix quadrati novi 3136 rem item præstantis. Et quia $3 \times 3136, + 1. = 9409$, (cujus radix 97,) erit $2 \times 56 \times 97 = 10864$. novi adhuc quadrati radix rem item præstantis. Et sic semper. Exhibentur itaque infiniti quadrati integri rem præstantes.

Non interim ignoro, præter hos, alios item posse quadratos idem præstantes exhiberi, (exempli gratia, $3 \times 225, + 1. = 676 = 26 \times 26$. aliosque quos item exhibere possumus infinitos,) adeoque non omnes statim ex uno aliquo sic induci posse. Sed neque illud petebatur. Non enim propositum erat, ut *omnes* quadratos integros rem imperatam præstantes exhiberemus, sed, ut *infinitos*, quod factum est. Sin velit adhuc tertia vice, quæstionem

nem ſuam mutatis iterum terminis proponere; & quadratos integros rem imperatam præſtantes, non infinitos tantum, ſed omnino omnes exhibendos petere: etiam & illud exhibere, ſi libet, poſſumus.

Rem autem ſicuti dictum eſt, ſuccedere, (ne gratis dixerim) ſic demonſtratur. Cum ſupra oſtenſum ſit $\frac{4Q}{Dq}$ rem imperatam præſtare; id ſolum reſtat curandum ut ſit $\frac{4Q}{Dq} = Fq$ numerus integer; adeoque & ipſius radix $\frac{2R}{D} = F$, ſive $D) 2R (F$, numerus integer: hoc eſt, ut $D = N \sim q$, ſit numeri $2R$ aliquota pars. Cum vero fieri poſſit ut $2R$, adeoque & $4Q$, non ſit integer; ſubſtituatur, pro q, $\frac{a^2}{e^2}$; adeoque pro R, $\frac{a}{e}$. Erit itaque $Q \sim N) 2R (F$, hoc eſt $\frac{a^2}{e^2} \sim N) \frac{2a}{e} (F$; adeoque & $a^2 \sim Ne^2) 2ae (F$. Quoties itaque $a^2 \sim Ne^2$ eſt aliquota pars numeri $2ae$, totics erit F numerus integer. Hoc eſt, quoties differentia quadrati unius, à quadrato altero in numerum expoſitum ducto, eſt aliquota pars dupli rectanguli ſub duorum illorum quadratorum radicibus. Hoc autem (ut mille aliis modis contingere poteſt, ita) quod ſemper contingit, ubi differentia illa eſt vel 2, vel 1, manifeſtum eſt; quippe tum 1, numeri cujuſcunque integri; tum 2, numeri $2ae$; erit aliquota pars, Id autem in caſu noſtro contingere manifeſtum eſt. Cum enim ſit juxta quæſtionis exigentiam, $NFq + 1 = Lq$, erit differentia $Lq \sim NFq = 1$; adeoque ſi per hanc differentiam dividatur $2FL$, quotiens erit $2FL$ numerus integer; adeoque novus numerus F rem imperatam præſtans. Atque ſic ſemper. Quod erat oſtendendum.

Plura de hoc negotio ſubjungere (quanquam ad manum multa ſint) ſupervacaneum eſſe judico: metuo utique jam ne nimius fuerim.

Alia, quam propoſuerat quæſtio, non niſi ſero ad meas manus pervenit: hæc autem erat.

Invenire

Invenire duos numeros cubos quorum ſumma æqualis ſit duobus aliis numeris cubis.

Hanc ego paucis abſolvam. Solvit eam, uti audio, D. Frenicle variis modis, cujus & aliquos numeros vidi, quos cum jam acceperit Fermatius non opus eſt ut repetam: Alios itaque de noſtris adjiciam.

Cubus numeri 3. + *Cubus numeri* 365 = *Cub. num.* 27. + *Cub. num.* 30.

C.1.+C.8.=C.$4\frac{1}{2}$.+C.$7\frac{1}{2}$. C.6.+C.10.=C.$1\frac{1}{2}$.+C.$10\frac{2}{1}$.

C.1.+C.17.=C.$7\frac{1}{2}$.+C.$16\frac{1}{2}$. C.5.+C.11.=C.$\frac{2}{3}$.+C.$11\frac{1}{1}$.

C.$4\frac{1}{2}$.+C.17.=C.8.+C.$16\frac{1}{2}$. C.$\frac{2}{3}$.+C.$5\frac{1}{1}$.=C.3.+C.5.

C.8.+C.64.=C.36.+C.60. C.6.+C.48.=C.27.+C.45.

C.3.+C.$11\frac{1}{2}$.=C.11.+C.$5\frac{1}{2}$. C.10.+C.80.=C.45.+C.75.

C.5.+C.40.=C.$21\frac{1}{2}$.+C.$37\frac{1}{2}$. C.32.+C.66.=C.18.+C.68.

C.20.+C.54.=C.38.+C.48. C.30.+C.66.=C.4.+C.68.

C.60.+C.132.=C.8.+C.136. C.4.+C.48.=C.36.+C.40.

C.8.+C.$6\frac{1}{2}$=C.$3\frac{1}{2}$.+C.9. C.30.+C.81.=C.57.+C.72.

C.48.+C.99.=C.27.+C.102. C.5.+C.60.=C.45.+C.50.

C.$\frac{4}{2}$.+C.6.=C.$4\frac{1}{2}$.+C.5.

Et niſi hi ſufficiant numeri, exhibiturus adhuc ſum quot ipſe volet; idque tam facili negotio ut unius horæ ſpacio auſim vel centum ſpondere; ſive integros ſive fractos pro arbitrio. Quod adjicio ne iterum ſe numeros tantum integros voluiſſe dicat, dum tamen in quæſtione expoſita nulla ſit integrorum mentio.

Solutis autem hiſce quæſtionibus, ſi ſaltem adhuc vires noſtras ſe ſatis examinaſſe putaverit, oratum velim Nobiliſſimum Virum, ne indigne ferat, aut etiam quaſi virium noſtrarum his in rebus defectui imputet, ſi de hujuſmodi in poſterum quæſtionibus ſolvendis non admodum ſimus ſoliciti. Quas quidem ut ut ipſe deperit, me ſaltem illis (dicam enim quod res eſt) non adeo impenſe delectari profiteor, ut vel multum illis impendam tem-

poris aut laboris, vel tanti judicem, ut, aliis neglectis inquisitionibus Geometricis quæ magis placeant, ad numerosas hasce speculationes divertam. Quod tamen non ita dictum putet, quasi ego justis ipsius industriæ laudibus quicquam derogatum velim, si & has sectetur ipse speculationes (verum hortandum potius ut siquid reconditum his in rebus invenerit, quod summæ rei literariæ promovendæ conducat, id methodica tractatione palam aperiat:) Id saltem insinuatum velim, cum non omnibus mihi vacet æqualiter intento esse, iis quæ magis mihi animo fuerint, usuique futura videantur, me potius incubiturum, aliaque quæ aliis forsan magis placeant ipsis permissurum, ut & nos nostris suisque alii fruantur.

Atque hoc quidem responsi loco dictum sit quæstionibus quas jam proponit, viz. *Datum numerum Cubum in duos Cubos rationales dividere.* Et, *Datum numerum Cubum ex duobus Cubis compositum in duos alios cubos rationales dividere.* Quas quidem si adhuc aggredi velit Honoratissimus Vicecomes Brouncker (qui & modo velit aggredi, non dubito quin feliciter sit affecuturus, saltem quatenus rei natura patitur,) vel etiam quivis alius, ego id minime aversor: mihi saltem neque vacat, neque animo est.

Quanquam enim non displicuerit semel iterumque, cum Nobilissimus Vir illud desideraverit, manus conserere, & in arenam suam descendere: ut tamen illud semper faciam, novasque perpetuo suppullulates quæstiones, aggredeemur, (quasi huic soli vacemus) non expectabit, credo, Vir Doctissimus;

Quod & pariter dictum esto de propositionibus suis quas jam proponit negativis, puta, Quod *præter 25 nullus sit alius numerus quadratus integer, qui binario junctus efficiat cubum: Nec, præter 4 & 121, alius qui quaternario junctus efficiat Cubum.* Quæ num veræ sint necne, non sum admodum solicitus, cum non videam quid inde magni ponderis dependeat, adeoque nec studiosus inquiram. Cur autem eas quasi mirandæ audaciæ res ostentet, quæque attonitos reddant vel D. Freniclum, vel & Anglos: ego nullus video. Quippe frequentes admodum sunt, nobisque familiares, istiusmodi determinationes negativæ. Neque majus quid aut grandius insinuant, quam si dicerem, Cubicubum (potestatem sextam intelligo) nullum (in integris) esse, vel etiam Quadratum, qui numero 62 junctus efficiat quadratum: Nec, præter 4, ullum quadratum esse

qui

qui numero 12 additus faciat biquadratum; Nec, præter 16, ullum biquadratum esse qui numero 9 additus faciat quadratum: Vel etiam, nullos (in integris) Cubos esse qui ab invicem distent numero vicenario; nec, præter 8 & 27, qui distent numero, 19: Nullos item Biquadratos (integros) esse, quorum ab invicem differentia sit 100, vel etiam (ut semel dicam) ullus alius par numerus qui non sit per 16 divisibilis. Cujusmodi innumeras determinationes negativas in promptu esset comminisci.

Ad meam quod attinet Arithmeticam Infinitorum, (quam proxime aggreditur,) Fatetur ille, easdem me invenisse propositiones, quas ipse; eaq; præstitisse (nisi quod de Centro Gravitatis nihil dixerim, de quo mox dicendum erit,) quæ ipsius prima quam viderim Epistola quasi Geometriæ miracula prædicabat, nec quicquam eorum esse quæ illic innuit quod non videre est in tractatu illo meo, prout citatis locis indicaveram.

Verum id illum, uti videtur, male habet, (quo ego me nomine nunquam culpandum fore autumaveram,) quod eâ methodo usus fuerim, non quæ solum evincat inventorum veritatem, per demonstrationes apagogicas, sive deductiones ad impossibile, quæ apud Archimedem frequentes sunt, (& quibus quidem uti conveniret si vellem ut Lector magis admiretur quam intelligat;) sed quæ simul investigandi ordinem ostendat.

Quod autem ad Archimedis exemplum provocet (quod quidem, si ea libuisset methodo demonstrandi procedere, me satis defendisset;) non ignotum credo fore doctissimo Viro, id quidem in Archimede à gravissimis viris doctissimisque maximè desiderari, & tantum non vitio verti, quod ipse quasi datâ operâ ita occultaverit sua inquisitionis vestigia; quasi invidisset posteris investigandi artem, à quibus tamen assensum inventis extorquere vellet. Sed nec Archimedes solus, verum & veterum plærique omnes, Analyticen suam, (quam habuisse, extra dubium est,) eousque celarunt posteros, ut Recentioribus facilius jam fuerit novam suo marte comminisci (quod præsenti præteritoque seculo factum est) quam indagâsse veterem.

Grates siquidem ego potius expectassem, quam ut eo nomine criminis insimularer, quod aperte & sine fuco non modo quo perveneram, sed & quibus passibus, indicaverim; nec (quod de aliis

non pauci conqueruntur) pontem illum ipſe demolitum iverim quo ego flumen tranſieram.

Quod autem innuit Vir Nobiliſſimus, propoſitionum mearum aliquot Archimedea methodo demonſtrari poſſe; Ego illud nullus dubito: quippe illud facile fieri poſſe, non uno in loco, indicavi; (Arith. Infin. pag. 38. 83. & alibi;) ſed &, cur illud ipſe non fecerim; (ut de eligendæ methodi ratione non opus habeat jam tandem ſciſcitari, cum illam ego in operis decurſu indicaverim.) Vix quemquam enim arbitror, non dicam, de trivio Arithmeticum, ſed, paulo exercitatiorem Geometram (nedum tantum virum) qui non poterit, ex demonſtrationibus noſtris, Apagogicas & Archimedêis ſimiles facili negotio efformare. Quod autem inſuper ſe id facturum polliceatur; quamquam ipſius ego hac in re laborem non reſpuerim; cur tamen id oneris in ſe ſuſcipiat, nulla cogit neceſſitas, cum id ipſum, ni fallor, quod ſe facturum innuit, à Cavallerio, in ipſius de Uſu Indiviſibilium in Poteſtatibus Coſſicis tractatu, jam factum fuerit. Sin & ſuum velit calculum adjicere, non recuſo.

Si denique Inductionem (argumenti genus tum Veteribus tum Recentioribus ſatis uſitatum, & frequentius fortaſſe quam ipſe prima vice putaverit) tanquam illegitimam argumentandi formam reſpuat; vel etiam (quæ nuſquam non nunc dierum obtinent) notarum Algebricarum uſum; ego ſane de Apologia hac ex parte texenda nequaquam ſum ſolicitus. Utebar ego jure meo, dū qua libuit incedebam via, & utatur ipſe ſuo liceat, ſi malit alias incedere, nec dubito quin, quæ culpat ipſe, erunt qui laudabunt.

Quod me autem maxime ſpectare videatur unum adhuc reſtat, quod eſt de Centro gravitatis; ut nempe fidem liberem, diluamq; quod, ſi nonimpingit, ſuſpicari ſaltē videtur Vir Acutiſſ. falſi crimē.

Dixeram utique (in literis meis Junii 6. datis) quod, quamvis, ex iiſdem quibus (in Arith. Infin.) utor principiis, de Gravitatis Centro tum in Parabolis omnigenis, tum in aliis figuris quamplurimis ſive planis ſive ſolidis facile eſſet ſtatuere; totam tamen illam de Gravitatis Centro ſpeculationem conſulto omiſerim, ne in digreſſionibus nimius eſſem. Ad hæc reponit Vir Nobiliſſimus; haud illud ſibi perſuaſum iri; adeoque optaſſe ſe (quaſi ego illud ſpeciatim dixerim) mecentra gravitatis in Hyperbolis infinitis determinaſſe; eaſque quæ habent diſterminaſſe ab

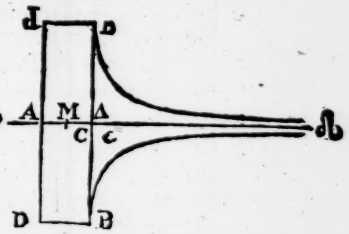
iis

jis quæ non habent: ſaltem ut generalem propoſitionem, utut citra demonſtrationem, tranſmittam petit. Quod ni fecerim, innuit, exiſtimaturum ſe rem eam mihi minimè cognitam eſſe (quod tamen eſſe, me putat inſinuaſſe;) nec prius ſe miſſurum ſuas quas pridem pollicitus erat ſpeculationes, quam hoc præſtitero.

Faciam itaque quod petit Vir Nobiliſſimus; tum ne malæ fidei meritò videar infimulari, tum ut videat, miranda quæ putaverit, ſibique forſan ſoli peculiaria, etiam noſtræ poteſtatis eſſe. Sed &, ultra quam petit, adjungam etiam tum inveſtigandi methodum tum demonſtrationem more meo; ut videat quam directa methodo ex ea quam trado indagandi arte emergant.

Hyperbolas ſuas Infinitas, non alias eſſe à Figuris juxta ſeries quas *Reciprocas* appello conflatis, (& quarum quadraturam oſtenderam prop. 102, 103, 104, 105. Arith. Infin.) jam antehac oſtendi, & fatetur ipſe.

Eſto itaq; ad rectam A △ ♪ infinitam, ſtiuſmodi figura utrinq; poſita, atque ita quidem aptata ut hæc illi congruat, puta A♪B D ipſi A♪b d. Figura ex utriſq; conflata eſt ea quam appellat Fermatius *Hyperbolam infinitam*, & cujus centrum Gravitatis poſtulat.



Cum igitur rectæ, ipſi A ♪ parallelæ (tum infra tum ſupra) ſit ſeries reciproca, adeoq; indicem habeat negativum, puta — p: Cumq. item dimidia ſint integris proportionalia, adeoq; ipſarum puncta media, (hoc eſt, rectarum centra gravitatis,) intelligenda ſint ex libra A ♪ ſuſpendi in diſtantiis à puncto A (quod libræ centrum jam ſupponitur) quæ ſint ipſis magnitudinibus proportionales: Singularum momenta, quorum ratio ex rationibus tum magnitudinum tum diſtantiarum componitur, ſeries erit indicem habens — 2 p. Erit itaque tum figura tota, ad inſcriptum parallelogrammum D b; ut 1, ad — p + 1: tum omnia illius momenta, ad omnia hujus, (in hoc ſitu;) ut 1, ad — 2 p + 1. Centrum autem gravitatis parallelogrammi, eſt ipſius punctum medium, (uti notum eſt;) adeoque parallelogrammum D b, ſuſpendi intelligendum eſt ex puncto M, medio inter A △; cujus itaque diſtantia ab A, eſt A M = ½ A △. Cum itaque totius fi-

ſuræ pondus in ſuo ſitu, ſit ad pondus parallelogrammi in ſuo, ut 1, ad $1 - 2p$: ſi ſumatur, in altero libræ brachio, recta A P quæ ſit ad A M, ut 1 ad $1 - 2p$, parallelogrammum illud ex puncto P ſuſpenſum æquiponderabit toti figuræ ſuſpenſæ ut prius. Cum itaque magnitudo figuræ totius ad magnitudinem parallelogrammi, ſit ut 1 ad $1 - p$: Si fiat, ut 1 ad $1 - p$, ſic AP (ex una parte) ad A C (ex altera parte;) erit (propter diſtantias magnitudinibus reciproce proportionales) C centrum gravitatis expoſitæ figuræ infinitæ, ſi quod ſit.

Porro, quoniam in operationis proceſſu ſumendum erat, ut 1 ad $1 - 2p$, ſic A P ad A M; manifeſtum eſt, ut habeatur punctum P, quantitatem $2p$ minorem eſſe debere quam 1, (adeoque p minorem quam $\frac{1}{2}$,) ſecus enim $1 - 2p$, vel nihil erit vel minus quam nihil, & propterea punctum P nuſquam erit, adeoque nec punctum C.

Invenimus itaque, in Fermatii hyperbolis infinitis, quotquot habent, centrum gravitatis; eaſque quæ habent ab iis quæ non habent diſterminavimus. Quod erat imperatum.

Plura additurus eram de gravitatis centro, tum in his, tum in aliis item figuris, variis modis conſtitutis: niſi quod tum hoc unum peteret Fermatius, tum recordandum ſit me jam epiſtolam non volumen ſcribere.

Cum vero hactenus illi obſecutus ſim; ab illo viciſſim rogo, ut id ipſum ille in ſuis hyperbolis hiſce præſtet, ubi duæ utrinque curvæ non ſint ejuſdem generis hyperbolæ; atque id univerſaliter. Exempli gratia. Si (ad mentem Fermatii) in figura infinita

A δ B D, inscribantur parallelogramma A G quolibet; & in figura A δ b d, quotlibet parallelogramma A g; sitque, illic, factum ex Cubo F G in rectam G H æquale facto ex cubo B D in rectam B E; hic vero, factum ex surdesolido f g in quadratum g h æquale facto ex surdesolido d h in quadratum b e. Quæritur totius figuræ centrum gravitatis si quod habeat; & determinare universaliter quales ex his habeant & quales non. Sin fateatur illud se præstare non posse, ego me id facturum spondeo. *Vid. Append. hujus Epist.*

Tandem, post reliqua, allatæ mihi sunt seorsum ejusdem Fermatii in Arithmeticam meam Infinitorum, Animadversiones quatuor. Sed quæ tuto possem præterire, nisi forsan se sic neglectum putaret Vir Illustris. Facile mihi persuadeo, quæ illic habentur præpropere scripta esse & festinanter, (& quæ forsan ipse, si libri reliquum adhuc legerit, indicta mallet:) adeo parum sapiunt tanti Viri acumen, suntque ἀπροσδιόνυσα omnia.

1. Ubi, in Epistola quæ Arithmeticæ Infinitorum præfigitur, historiam inquisitionis meæ expono, & speciatim quomodo *Cavallerii* Methodum Indivisibilium ad præsens negotium applicaveram; Nempe sicut, Ratio circulorum omnium ex quibus (ad mentem Cavallerii) componitur Conoides Parabolicum, ad totidem in Cylindro, est ratio ipsius Conoidis ad Cylindrum, & ratio quam habent omnes eorundem diametri ad omnes horum, est ratio Parabolæ ad Parallelogrammum; (quarum utraque nota est:) item, ratio omnium circulorum in cono ad omnes in Cylindro est ratio coni ad cylindrum, & ratio quam habent eorum omnium diametri ad diametros horum est ratio Trianguli ad Parallelogrammum; (quarum item utraque nota est:) Ita, ratio Circulorum omnium in sphæra ad omnes in cylindro est ratio sphæræ ad cylindrum, & ratio quam habent eorum omnium diametri, ad diametros horum est ratio circuli ad Parallelogrammum; (Quod nec ipse diffitetur Fermatius:) harum vero cum prior jamdudum cognita fuerit posterior incognita, id mihi me proposuisse dixi inquirendum, num quâ possem arte, ex eâ cognita, hanc, incognitam hactenus, investigare. Regerit Fermatius, At cognosci hoc non potest, nisi cognitâ circuli quadraturâ. Rectissime quidem; nam hoc ipsum est, circulum quadrare. Et, ubi hoc mihi proposui inquirendum, proponebam inquirendam

dam circuli quadraturam. Quod & ἐν παρόδῳ ibidem dictum est.

2. Cum dixerim, quæsiisse me, in serie numerorum 1, 6, 30, 140, 630, &c. (cujus seriei creationem indicaveram) quis medius esset interponendus terminus inter 1, & 6. Respondet ille, medium Geometrice proportionalem rem non præstare, ut qui reliquos progressionis terminos non respiciat. Et rectè quidem: quippe series exposita non est series Geometricè proportionalium, adeoque terminus medius quæsitus non debet esse medius Geometrice proportionalis. Dum autem hinc infert, medium nullum convenire, quia medius Geometricè proportionalis non convenit; nulla est vel umbra consequentiæ: nec magis sequitur quam si idem dixisset de serie 1, 6, 11, 16, &c. ubi nemo nescit, inter 1 & 6, interponendum esse medium $3\frac{1}{2}$; non quidem ut medium Geometrice proportionalem, sed ut medium seriei congruum, nempe (propter seriei naturam) medium Arithmetice proportionalem. Similiter, in serie numerorum 1, 6, 15, &c. (qui sunt numeri triangulares) siquis inter 1 & 6, eo quod nec medius arithmeticus (puta $3\frac{1}{2}$) nec etiam Geometricus ($\sqrt{6}$) conveniret, medium igitur seriei congruum nullum esse affirmaverit: næ illum hallucinari certum est, quippe terminus intermedius seriei congruus est 3, numerus item triangularis, ficus & inter 6, & 15, interponendus est 10. Et quidem si etiam adhuc quæratur in serie 1, 3, 6, 10, 15, &c. quis conveniret terminus intermedius inter 1 & 3, terminum illum esse $1\frac{1}{2}$ à ostendimus prop. 175. Sed & de hujusmodi serierum interpolatione, cum per totum librum illum frequentissimus sit sermo, (ut quod maximum est totius istius libri negotium,) præsertim à Schol. prop. 165. ad finem usque libri; impossibile esset, si librum perlegerit & vel mediocriter pensitaverit ut de medio Geometrice proportionali me loquutum esse existimasset. Et quidem eandem ipsam seriem 1, 6, 30, 140, &c. inter alias interpolandam suscepimus, atque inter 1 & 6 interponendum esse medium $2\square$, ostendimus ad prop. 167. quid autem innuit terminus ille, fuse declaratum est ad prop. 191.

3. Cum investigationem primi Lemmatis (prop. 1.) ita instituerat ut conformis sit secuturis aliis similibus lemmatum intricatiorum indagationibus prop. 19. 39. 43. &c. instituendis, eisque facem præferret. Ille longa disquisitione ostendit propositionem

tionem illam ſe aliter poſſe demonſtrare. Quod quidem ego nullus unquam dubitarem. Ecquis enim eſt vel de trivio Arithmeticus, nedum Vir tantus; qui neſciat ſummam progreſſionis arithmeticæ colligere? aut etiam, colligendi methodum demonſtrare? Et quidem ſi me illud neſcijſſe putaverit (quod haud exiſtimo) videat licet *Prop.* 2. *Con. Sect.* & *Prop.* 45. *cap.* 27. noſtræ *Matheſeos Univerſalis*. Sed & interim monendus eſt acutiſſimus Vir, eo loci me non de propoſitione demonſtranda quam affirmaveram, verba facere; ſed de re quæſita inveſtiganda, ſi jam eſſet ignota; ut exemplo hujus inveſtigationis in re facili, huic ſimiles deinceps in re difficiliori facilitarem. Adeoque, ſi appoſitè loqui voluiſſet, oſtendiſſet hanc non legitimam eſſe in rem ignotam inquirendi methodum: Quod tamen non facit. Fatetur, enim utilem eam eſſe in rebus occultis inquirendis, modo caute adhibitam. Cum itaq; circuli quadraturam, quam inter cætera venabar, rem ſatis occultam eſſe non negaturum credam; neque etiam me tam incaute uſpiam eam adhibuiſſe methodum ut inde lapſus fuerim, inſinuet; non videoquo nomine hanc meam inquirendi methodū merito culpandam cenſeat. Si autem vellet, ut rem legitime inventam, demonſtrationibus adhuc apagogicis a poſteriori confirmarem: cur id non fecerim abunde dictum eſt, tūm ad *prop.* 2. *Con. Sect.* tum ad *prop.* 43 *Arith. Infin.* tum alibi. Quippe illud opus eſſe non ducebam; uti necdum opus eſſe exiſtimo.

4. Denique, cūm ad *prop.* 2. innuit limitationem indebite annexam eſſe; Omnino errat Vir Clariſſimus a mente mea nec mea verba ſatis advertit. Quippe ego propoſitionem illam univerſaliter affirmabam, & univerſaliter etiam (quantum opus erat) me demonſtraſſe exiſtimo; (emergit utiq; ex inquiſitione præcedente:) Nempe univerſaliter verum eſt & univerſaliter affirmatum, ſeriem arithmetice proportionalium ab o inchoatam, (quippe quæ ſemper erit ut, o, 1, 2, 3 &c.) quicunq; fuerit terminus ſecundus, ad ſeriem totidem maximo æqualium eſſe ut 1 ad 2. Quod ſine ulla limitatione verum eſt. Sed & addideram, explicationis cauſæ, vel, ſi libet, inſtar corollarij; Si terminorum numerus ponatur *a*, & terminus ultimus *l*, (quicunq; fuerit ſecundus) erit omnium ſumma $\frac{1}{2}$ *a l*, hoc eſt ſemiſſis numeri terminorum ($\frac{1}{2}$ *a*) in (*l*) terminum ultimum ductus. Atque hoc etiam ſine ulla limitatione affirmatum eſt. Sed & addebam porro,

Si item terminus secundus sit, 1 (non autem secus,) terminorum numerus erit $l+1$, hoc est, unitate major quam est terminus ultimus; adeoq; $\frac{l+1}{2}\,l$, erit omnium summa, quippe hoc casu $\frac{l+1}{2}$ tantundem erit atq $\frac{1}{2}\,a$ semissis numeri terminorum, qui itaq; in l terminum ultimum ductus exhibebit omnium summam. Atq; hic quidem (quod solum ego limitate enunciveram) limitatione opus esse haud pernegabit Vir doctissimus. Quanquam enim verum sit, progressionis (verbi gratia) 0, 1, 2, 3, 4, (cujus secundus terminus est 1) numerum terminorum esse $l+1$, hoc est $4+1$, sive 5, in alia tamen cujus terminus secundus non sit 1, puta 0, 2, 4, 6, 8, numerus terminorum non est $l+1$, hoc est $8+1$, , sed $\frac{1}{2}+1$, hoc est 5. Neq; alium omnino sensum ferre possunt mea verba, nec nisi collo admodum obtorto alio detorqueri. Siquidem postquam universaliter affirmaveram, *Series Arithmetice-proportionalium continue crescentem ab 0 inchoatam, esse ad seriem totidem maximo æqualium, ut 1 ad 2:* Subjunxi protinus ipsissima hæc verba, *Nempe, si primus terminus sit 0, secundus 1 (nam, si secus, moderatio adhibenda erit) & ultimus l; erit summa* $\frac{l+1}{2}\,l$ *(erit enim, eo casu, numerus terminorum* $l+1$*;) Vel (posito numero terminorum a, quantuscumq; sit terminus secundus)* $\frac{1}{2}\,al$. Quæ adeo perspicuè dicta sunt, ut mirum sit quenquam, modo satis advertet, perperam intellexisse posse. Festinationi itaq; dandum est, quod Vir Illustris, alioqui satis acutus, & rerum sagax, non satis assecutus est mentem meam.

Atque hæc sunt quæ ad animadversiones hasce dicenda putaverim; ne saltem eas contemptui habuisse videar: Si enim exinde otij quid nactus sit Fermatius eadem secundò inspiciendi, & paulo accuratius pensitandi, non dubito quin jam ipse sibi priadem satisfecerit.

Quoniam vero lubitum fuerit Nobilissimo Viro in arenam provocare (quod in literis suis videre est) non unum aut alterum de grege Mathematicum, sed totam tum Angliam, tum Belgiam, Galliamq; exceptâ Narbonensi reliquam; Non ægre feret, credo, si & parva rependamus; neq; id in re leviculâ, sed quam nemo non agnoscet tum dignum vindice nodum, tum si solverit operæ pretium. Non illam quæstionem intelligo quam

ad

ad ipſius primam reponebam, tanquam iſtius ſimilem: Hanc enim non eam eſſe exiſtimo, ut anxiâ diſquiſitione digna videatur; Neq; etiam illam de Coni Fruſto, quam (uti tunc indicavimus) non ut propoſitionem difficilem, ſed ut elegantem proponebam: Sed neq; eam modo memoratam in ipſius epiſtola, Nempe, expoſita ſerie numerorum 1, 8, 30, 140, 630, &c. terminum inter 1 & 6 intermedium ſeriei congruum invenire; Quamvis enim fuerit hoc problema ſatis arduum quum primum proponeretur, quodq; Vir Nobiliſſimus etiam adhuc exiſtimat inſolubile; cum tamen id in libris editis a nobis jam ſolutum ſit, non eſt ut idem denuo exponamus ſolvendum. Sed alteram volo huic conſimilem; nempe expoſita ſerie numerorum $1, \frac{5}{4}, \frac{31}{20}, \frac{209}{140}, \frac{1471}{980}, \frac{10625}{7056}$, &c. terminum inter 1 & $\frac{5}{4}$ intermedium, ſeriei congruum, invenire. At nolim interim exiſtimet me medium quærere Geometrice-proportionalem, (quod videtur pridem cenſuiſſe) vel etiam Arithmetice-proportionalem, (quaſi putem $\frac{11}{12}$ aut $\sqrt{\frac{5}{4}}$, tanta ſolicitudine quærendum,) ſed medium qui ſit naturæ ſeriei congruus, totamq; ſeriem reſpiciat. Sed neq; ſufficiet dixiſſe medium Geometrice-proportionalem, vel etiam Arithmetice proportionalem, ſeriei congruum eſſe: non enim quæritur quis non ſit congruus, ſed quis ſit.

Ne vero ludicrum quid ſibi ſentiat propoſitum, aut rem nihili: Si quæſitum ille legitime ſolverit, ſpondemus ei viciſſim (πρωτότυπον ſatis amplum) Hyperbolæ quadraturam: Sin illud haud præſtiterit Narbonenſis Gallia, præſtitum illud aliquando exhibebit (favente Deo) Anglia.

Verum jamdiu eſt quod D. V. fuerim moleſtus, tantaque tua clementia audacior factus in Urbanitatis leges peccaverim; idq; eouſque, ut ne veniam quidem admiſſi poſſim, ſine nova culpa, exorare. Id ſaltem ſpei ſupereſt, ut, pro inſigni veſtra humanitate, quicquid eſt admiſſi criminis tam benigna ſis interpretatione adjuturus, ut meliori apud te quam teipſo vel mei vel gentis noſtræ advocato dicam, an patrono, haud facile ſim uſurus. Qua ſpe fretus, etiamnum audeo, favore tuo nixus, me profiteri

Inſigniſſime Domine,

Obſequentiſſimum Tibi, Tuiq;

Oxoniæ *Nov.* 21. 1657. *obſervantiſſimum*

 J. WALLIS.

Quæ de centro gravitatis ſuperius innuimus, tanquam in Epiſtola proxime precedente omiſſa, vel immutata, placuit hic ſubjungere; ut res ea tota Lectori plenius exhibeatur.

CUm exigit à me Fermatius, ut in *Hyperbolis* ſuis *Infinitis*, quotquot habent, centrum gravitatis exhibeam; easq; quæ habent, ab iis quæ non habent diſterminem; ſaltem ut generalem propoſitionem, utut citra demonſtrationem, transmittam: Faciam quod petit Vir Nobiliſſimus; &c. Et quidem, ultra quam poſtulat, Demonſtrationem adjungam, ut videat quam directâ methodo, ex ea quam trado indagandi arte, emergat.

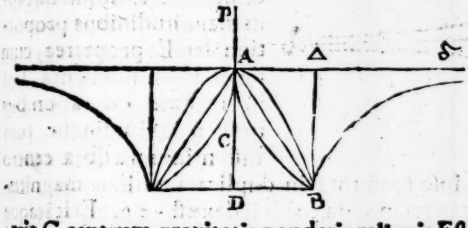
Propoſitio hæc eſt:

SI ad axem AD, cujus vertex A, adjaceat (utrinque) figura ſive plana ſive ſolida, cujus ordinatim inſcriptæ, ſive rectæ, ſive ſuperficies planæ ſimiles, ſint juxta ſeriem ſive æqualium, ſive primanorum, ſecundanorum, tertianorum &c. ſive ſubſecundanorum, ſubtertianorum &c. ſive aliam quamlibet ex his utcunque compoſitam, ſive denique harum cuilibet reciprocam, (inter quas ipſius ſunt quas innuit *hyperbolæ infinitæ*,) conſtitutæ: ſi Axis AD ita in puncto C dividatur, ut ſit, ſicut 1 ad ſeriei iſtius indicem unitate auctum, ita CD ad CA: Erit C Centrum gravitatis iſtius figuræ. Quæque ita conſtitutæ ſunt ut Axis AD ita dividi poſſit, centrum gravitatis habent; quæ ſecus, non habent. Sic autem conſtitutæ ſunt, ſi ſeriei index major ſit quam 1: ſin ſecus, non ſunt.

Sequitur Demonſtratio.

POnamus utique primò Verticis punctum A, in centro libræ; ſitque Axis AD juxta libræ longitudinem applicatus. Sitque ſeriei juxta quam procedunt ordinatim applicatæ (ſive rectæ ſive planæ) Index *p*; quæ propterea ad A correſpondentem ſeriem æqualium erit, ut 1, ad *p* + 1. Ipſarum autem diſtantias à vertice, adeoque à Centro libræ, diametris interceptis proportionales eſſe (ſeu potius eaſdem) per ſe patet, adeoque ſeriem eſſe primanorum cujus index 1. Cum itaque momentorum ad invicem ratio componatur ex rationibus tum magnitudinum, tum à centro librę

bræ diſtantiarum; Momentorum ſeries (quippe ex duabus illi⁹ compoſita) indicem habebit $p+1$, (ex componentium ſerierum indicibus aggregatum.) Erit itaque momentorum omnium aggregatum (hoc eſt, pondus totius figuræ ſic appenſæ) ad totidem ultimo æqualia (hoc eſt, ad figuram correſpondentem ex æqualibus conflatam, ex puncto D appenſam) ut 1 ad $p+2$. Si itaque in altero libræ brachio ſumatur AP, quæ ſit ad AD, ut 1, ad $p+2$; atque ex puncto P ſuſpendatur correſpondens ea figura ex æqualibus conflata; æquiponderabit ea expoſitæ figuræ primitus appenſæ; eritque, duorum ſimul ſic appenſorum pondetum, centrum gravitatis punctum A. Adeoque ſublato altero ex



puncto P appenſo, ſumptoque ut 1 ad $p+1$ ſic AP ad AC, (hoc eſt, ut magnitudo ad magnitudinem ſic reciproce diſtantia ad diſtantiam,) erit C centrum gravitatis ponderis reliqui. Eſt autem

$AP = \frac{1}{p+2}$ AD. ergo $AC = \frac{p+1}{1} AP = \frac{p+1}{p+2}$ AD; adeoque $CD = \frac{1}{p+2}$ AD; & propterea. AC. CD: : $p+1$. 1. quod erat demonſtrandum. Si autem p ſit vel -1, vel minus quam -1, (puta -2, -3, &c.) Erit $p+1$ (puta $-1+1$, $-2+1$, $-3+1$, &c.) vel 0, vel minus quam 0, adeoque ad 1 nullam habebit rationem. Unde patet determinatio.

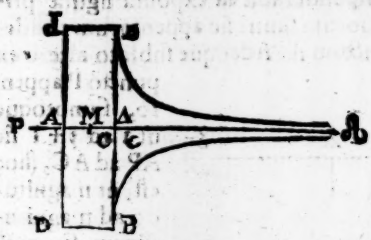
Dicet fortaſſis; Hoc pacto inveniri quidem centrum Gravitatis in iiſdem figuris (inter alias) quas ille *Hyperbolas Infinitas* vocat, ſed non in eodem ſitu. Non enim ponit ille ſuas utrinq; a diametro terminata AD in infinitum continuatas; ſed utrinque ad infinitam diametrum A ♪: & centrum gravitatis hoc ſitu quærit.

Fatemur quidem hoc verum eſſe. Sed regerimus, nec minus curioſam hanc eſſe ſpeculationem, quam illam alteram; &, ni fallor, novam: neſcio enim an vel ipſe Fermatius vel quiſpiam alius id antehac ſuſceperit, nedum aſſecutus ſit. Ne autem que-

ratur

ratur, hoc sibi utcunque non satisfacere ; eo quod ille centrum gravitatis in alio situ ponat; non gravabimur etiam ex ea parte sibi satisfacere.

Cum rectæ A Δ ♂ parallelæ (cum infra, tum supra,) sint series reciproca seriei directæ cujus index sit, verbi gratia, p; adeoque seriei reciprocæ index $-p$; Cumque item dimidia sint integris proportionalia; erunt ipsarum semisses ejusmodi item series eundem habens indicem $-p$: adeoque ipsarum puncta media, hoc est



rectarum centra gravitatis, intelligenda sunt ex libra A♂ suspendi in distantiis à Centro libræ A, quæ sint ipsis magnitudinibus proportionales. Et propterea, cum singularum momenta sint in ratione ex rationibus tum magnitudinum tum distantiarum à libræ centro composita erunt ipsa momenta in duplicata ratione magnitudinum, adeoq; series reciprocra cujus index est $-2p$. Erit itaque tum figura tota, ad inscriptum parallelogrammum; ut 1, ad $-p+1$: tum omnia illius momenta, ad omnia hujus (in hoc situ) ut 1, ad $-2p+1$. Est autem (ut notum est) parallelogrammi centrum gravitatis, ipsius punctum medium; adeoque inscriptum parallelogrammum suspendi intelligendum erit ex puncto inter A & Δ medio; puta M: ejusque à centro libræ distantia est $AM = \frac{1}{2} A\Delta$. Cum itaque totius figuræ pondus in suo situ, sit ad pondus inscripti parallelogrammi in suo, ut 1 ad $-2p+1$, si sumatur, in altero libræ brachio ultra centrum A, recta AP, quæ sit ad AM, ut 1 ad $-2p+1$; parallelogrammum ex puncto P suspensum æquiponderabit expositæ figuræ suspensæ ut prius. Est autem magnitudo figuræ expositæ, ad Parallelogrammi magnitudinem, ut 1 ad $-p+1$. Si itaque sumatur ut 1, ad $-p+1$, sic AP ex una parte, ad AC ex altera parte; (nempe distantiæ magnitudinibus reciprocè proportionales;) erit C expositæ figuræ centrum gravitatis. Est autem $AP = \frac{1}{-2p+1} AM$; adeoque $AC = \frac{p+1}{1} AP$

=

$= \frac{-p+1}{-2p+1} \times AM$. Hoc eſt, ut $1-2p$ ad $1-p$, ſic AM, ad AC.

Oportet autem 1 plus eſſe quam $2p$ (adeoq; p minus eſſe quam $\frac{1}{2}$) ſecus enim $1-2p$ nihil erit, vel etiam minus quam 0. Dico itaq;

Si ad Axem $A\infty$ infinitum, cujus vertex A, utrinque adjaceat figura plana, cujus ad axem conjugatum DA d (utrinque terminatum & æqualiter a puncto A medio porrectum) ordinatim applicatæ ſint juxta ſeriem aliquam Reciprocam (adeoq; indicem habentem negativum) conſtitutæ, (quales ſunt quas appellat Fermatius *Hyperbolas Infinitas*:) Atque ſumatur, ut reciprocæ iſtius ſeriei index duplicatus vnitate auctus, ad eundem indicem unitate item auctum, ſic AM (diſtantia verticis, mediiq; puncti parallelogrammi inſcripti,) ad AC (verſus eaſdem partes in axe $A\infty$ jacentem;) erit C expoſitæ figuræ (ſi quod ſit) centrum gravitatis. Habebit autem ea Centrum gravitatis; ſi ſeriei index major ſit quam $-\frac{1}{2}$; ſin ſecus, non habebit.

Notandum autem eſt, eodem plane modo omnia ſuccedere, etiamſi duæ ſemihyperbolæ $DA\infty$, $dA\infty$, non utrinq; ponerentur ad rectam $A\infty$, (ut nempe prodeat figura hyperbolica infinita acuta, ut hic,) ſed utrinque ad rectam DB; (coincidentibus rectis DB, db,) ut figura prodeat excavata. Eodem, enim modo quo hic quæritur punctum C in recta $A\infty$, quærendum tum eſſet in recta DB, ſaltem producta.

Sed & eadem omnia eodem modo ſuccederent in figura ex duabus ſemiparabolis, ſive ſemiparaboloidibus, ſimilibus, & ſimiliter poſitis; ſive ad $A\infty$ tangentem in communi vertice, ſive ad DB baſim communem. Nempe erit ut $2p+1$, ad $p+1$; ſic AM, ad AC; (vel DM, ad DC.)

Satis itaq; ſuperque factum eſt Fermatij poſtulatis.

Facile autem eſſet ex ijsdem principijs, non in Parabolis tantum aut Paraboloidibus, integris, ſed & in ſemiparabolis, aut ſemiparaboloidibus centrum gravitatis determinare; imo & in ſemiſſe iſtiuſmodi figurarum quas *Hyperbolas Infinitas* appellat Fermatius; (quod an ipſe unquam cogitaverit neſcio;) puta quæ rectis AD, DB, terminatis, $A\infty$ infinitâ, & unâ curva continentur. Invento quippe puncto C, tum in recta AD, tum in recta $A\infty$; ubi rectę hinc ductæ, rectis AD, $A\infty$ parallelæ, ſe

mutuo

ratur, hoc sibi utcunque non satisfacere, eo quod ille centrum gravitatis in alio situ postulet; non gravabimur etiam ex ea parte sibi satisfacere.

Cum rectæ A Δ ♂ parallelæ (cum infra, tum supra,) sint series reciproca seriei directæ cujus index sit, verbi gratia, p; adeoque seriei reciprocæ index - p; Cumque item dimidia sint integris proportionalia; erunt ipsarum semisses ejusmodi item series eundem habens indicem - p: adeoque ipsarum puncta media, hoc est rectarum centra gravitatis, intelligenda sunt ex libra A♂ suspendi in distantiis à Centro libræ A, quæ sint ipsis magnitudinibus proportionales. Et propterea, cum singularum momenta sint in ratione ex rationibus tum magnitudinum tum distantiarum à libræ centro compositæ erunt ipsa momenta in duplicata ratione magnitudinum, adeoq; series reciprocra cujus index est - 2p. Erit itaque tum figura tota, ad inscriptum parallelogrammum; ut 1, ad - p + 1: tum omnia illius momenta, ad omnia hujus (in hoc situ) ut 1, ad — 2p + 1. Est autem (ut notum est) parallelogrammi centrum gravitatis, ipsius punctum medium; adeoque inscriptum parallelogrammum suspendi intelligendum erit ex puncto inter A & Δ medio; puta M: ejusque à centro libræ distantia est AM = ½ AΔ. Cum itaque totius figuræ pondus in suo situ, sit ad pondus inscripti parallelogrammi in suo, ut 1 ad - 2p + 1, si sumatur, in altero libræ brachio ultra centrum A, recta AP, quæ sit ad AM, ut 1 ad - 2p + 1; parallogrammum ex puncto P suspensum æquiponderabit expositæ figuræ suspensæ ut prius. Est autem magnitudo figuræ expositæ, ad Parallegrammi magnitudinem, ut 1 ad - p + 1. Si itaque sumatur ut 1, ad - p + 1, sic AP ex una parte, ad AC ex altera parte; (nempe distantiæ magnitudinibus reciprocè proportionales;) erit C expositæ figuræ centrum gravitatis. Est autem $AP = \frac{1}{-2p+1} AM$; adeoque $AC = \frac{p+1}{1} AP$

$\frac{-p+1}{-2p+1} \times$ AM. Hoc est, ut $1-2p$ ad $\overline{1}-p$, sic AM, ad AC.

Oportet autem 1 plus esse quam $2p$ (adeoq; p minus esse quam $\frac{1}{2}$) secus enim $1-2p$ nihil erit, vel etiam minus quam 0. Dico itaq;

Si ad Axem A♪ infinitum, cujus vertex A, utrinque adjaceat figura plana, cujus ad axem conjugatum DA d (utrinque terminatum & æqualiter a puncto A medio porrectum) ordinatim applicatæ sint juxta seriem aliquam Reciprocam (adeoq; indicem habentem negativum) constitutæ, (quales sunt quas appellat Fermatius *Hyperbolas Infinitas*:) Atque sumatur, ut reciprocæ istius seriei index duplicatus vnitate auctus, ad eundem indicem unitate item auctum, sic AM (distantia verticis, mediiq; puncti parallelogrammi inscripti,) ad AC (versus easdem partes in axe A♪ jacentem;) erit C expositæ figuræ (si quod sit) centrum gravitatis. Habebit autem ea Centrum gravitatis; si seriei index major sit quam $-\frac{1}{2}$; sin secus, non habebit.

Notandum autem est, eodem plane modo omnia succedere, etiamsi duæ semihyperbolæ DA♪, dA♪, non utrinq; ponerentur ad rectam A♪, (ut nempe prodeat figura hyperbolica infinita acuta, ut hic,) sed utrinque ad rectam DB; (coincidentibus rectis DB, db,) ut figura prodeat excavata. Eodem, enim modo quo hic quæritur punctum C in recta A♪, quærendum tum esset in recta DB, saltem producta.

Sed & eadem omnia eodem modo succederent in figura ex duabus semiparabolis, sive semiparaboloidibus, similibus, & similiter positis; sive ad A♪ tangentem in communi vertice, sive ad DB basim communem. Nempe erit ut $2p+1$, ad $p+1$; sic AM, ad AC; (vel DM, ad DC.)

Satis itaq; superque factum est Fermatij postulatis.

Facile autem esset ex ijsdem principijs, non in Parabolis tantum aut Paraboloidibus, integris, sed & in semiparabolis, aut semiparaboloidibus centrum gravitatis determinare; imo & in semisse istiusmodi figurarum quas *Hyperbolas Infinitas* appellat Fermatius; (quod an ipse unquam cogitaverit nescio;) puta quæ rectis AD, DB, terminatis, A♪ infinitâ, & unâ curva continentur. Invento quippe puncto C, tum in recta AD, tum in recta A♪; ubi rectę hinc ductæ, rectis AD, A♪ parallelæ, se

mutuo

mutuo secant, habetur centrum gravitatis istius figuræ. Unde etiam facile colligetur si, opus est, centrum Gravitatis in figura ex hujusmodi semiparabolis, sive semihyperbolis infinitis dissimilibus constata.

Quæque modo de ejusmodi Hyperbolis planis ostensa sunt, possunt eadem arte ad figuras solidas (mutatis mutandis) accommodari, quæ constant applicatis ex planis similibus parallelis ad rectas sive AD, sive AA, parallelas. Sed recordandum est, me nunc Epistolam, non tractatum integrum conscribere.

EPISTOLA XVII.

D. Joh. Wallis *ad* D. *Vicecomitem* Brounker.

Illustrissime Domine,

QUoniam tu illud postulas (neque par est ut imperijs istiusmodi tuis non obtemperem) compingam quam possim breviter methodum quam in venandis numeris, ad Problema Fermatianum solvendum requisitis uterq; hactenus adhibuimus: una cum ejusdem fundamento; varijsque (ubi opus erit) operationum compendiis, siquando res alioqui in longum sit abitura:

Postulat problema, *ut dato quovis numero non-quadrato*, (puta n^a,) *reperiatur numerus quadratus* (puta a^2) *qui in datum numerum ductus, adscita unitate, faciat quadratum*, (puta $na^2 + 1, = l^2$.) Sed &, ut *istiusmodi quadrati* a^2, *exhibeantur infiniti*, quicunque proponatur non-quadratus *n*.

Postquam autem hoc olim problema, (quia de numeris Integris nulla facta fuit mentio,) ita solveramus ut omnes possibiles tum integros tum fractos exhiberemus: Se tandem exponit D. Fermatius se *solos integros* velle; adeoq; petere ut infiniti *quadrati integri* rem præstantes exhibeantur. Adeoque problema primitus propositum, in alium plane statum immutat a'si is plane naturæ. Utut sit, sequendum duxi; & rem in numeris integris aggrediendum. Quod & factum est.

Exordium sumendum existimabam ab universali Canone pridem exhibito. Nempe si numerus datus quilibet (quadratus vel non quadratus, integer vel fractus) dicatur N, & quadratus quilibet

quilibet Q, cujus ab N differentia dicatur D; erit $\frac{4QQ}{Dq}$ quadratus requisitus. Quem quidem Canonem, jam antehac demonstravimus non modo verum esse, adeoq; infinitos exhibere, sed & omnino omnes possibiles quadratos tum integros, tum fractos rem imperatam præstantes.

Hoc posito; illud solummodo (ob novam interpositam determinationem) ultra requiritur, ut $\frac{4Q}{Dq}$, adeoq; & ipsius radix $\frac{2R}{D}$, sit numerus integer. Hoc est, ut D sit aliquota pars numeri 2R. Quoties enim hoc contingit; manifestum est, quadratum, vi istius Canonis exhibitum, esse numerum integrum. Et uno istiusmodi integro habito, alii protinus infiniti, ne dicam omnes, certa methodo reperientur. Ut deinceps dicetur. Quoniam vero, quod non dissimulandum est, fieri potest ut 2R sit numerus fractus, etiam ubi $\frac{2R}{D}$ est integer; ponamus $R=\frac{s}{r}$ adeoq; $Q=\frac{s^2}{r^2}$, & propterea $D=Q\sim n=\frac{s^2}{r^2}\sim n$; tantundem itaq; erit dividere 2R per D, atq; $\frac{2s}{r}$ per $n\sim\frac{s^2}{r^2}$ sive (utrisq; in r^2 ductis) $2sr$ per $nr^2\sim s^2$. Si itaq; quocunq; modo reperiatur differentia, numeri n expositi in quadratum aliquem ducti, ab alio quovis quadrato, aliquota pars dupli rectanguli sub duorum illorum quadratorum radicibus (puta $mr^2\sim s^2$ aliquota pars numeri $2sr$); duplum hoc rectangulum, per differentiam illam divisum, quotientem exhibebit numerum integrum, qui radix erit quadrati quæsiti.

Dices. At quo pacto unum istiusmodi quadratum (a quo principium faciendum sit) reperiemus qui in n ductus, ab alio quadrato differat aliquota parte dupli istius Rectanguli? exponam illud itaq; more meo.

Quoniam exponitur n numerus integer non-quadratus, esto quadratus integer proximè major $c^2=na+b$. Adeoq; ducto numero n, in quemvis quadratum, puta a^2; erit $na^2=c^2a^2-ba^2$. sive $nQ_2=Q:a,-bQ_a$. Hoc est, numerus datus n, ductus in Qua-

dratum numeri a; æquabitur quadrato ejusdem numeri a toties sumpti quoties indicat c latus quadrati proxime majoris numero dato, dempto ejusdem a quadrato toties sumpto quoties indicat b differentia numeri dati a quadrato proxime majore. Exempli gratia, sit $n = 7$. adeoq; $c = 3 = \sqrt{9}$. & $b = c^2 - n = 2$. Quicunq; sumatur numerus a, erit $na^2 = c^2a^2 - ba^2$. sive $n\mathfrak{Q}a = \mathfrak{Q}ca, - b\mathfrak{Q}a$. Hoc est $7\mathfrak{Q}a = \mathfrak{Q}3a, - 2\mathfrak{Q}a$. Sumptis itaque, pro a, numeris successivis 1, 2, 3, 4 &c. res conspicietur ut in schemate. Ubi (manifestum est) propter numeros a, in primo loco, 1, 2, 3, 4, &c. arithmetice proportionales; erunt, & numeri ca in secundo loco 3, 6, 9, 12, &c. arithmetice item proportionales, quorum nempe continuus excessus est $c = 3$; & deniq; in tertio loco numeri ba^2; 2, 8, 18, 32, &c. (numerorum quadratorum continue sequentium æque multipli) differentias habebunt arithmetice proportionales, (quorum continuus excessus est $2b$.) Cum enim quadrati continue proximi, fiant ex continua additione numerorum imparium $1 + 3 + 5 + 7$, &c. (ut notum est) adeoq; ipsorum differentiæ continue crescant numero binario: eorundem æque multipli differentias habebunt continue crescentes per æque multiplum numeri binarij. Ut patet. Atq; ex hoc fundamento dependent omnes quæ sequuntur analogiæ arithmeticæ proportionalium, ut non opus sit illud identidem sæpius in sequentibus repetere.

$n\mathfrak{Q}a. = \mathfrak{Q}ca, - ba^2.$
$7\mathfrak{Q}1. = \mathfrak{Q}3, - 2.$
$7\mathfrak{Q}2. = \mathfrak{Q}6, - 8.$
$7\mathfrak{Q}3. = \mathfrak{Q}9, - 18.$
$7\mathfrak{Q}4. = \mathfrak{Q}12, - 32.$
$7\mathfrak{Q}5. = \mathfrak{Q}15, - 50.$
&c.

$1 = 1.$
$4 = 1 + 3.$
$9 = 1 + 3 + 5.$
$16 = 1 + 3 + 5 + 7.$
&c,

$1b = 1b.$
$4b = 1b + 3b.$
$9b = 1b + 3b + 5b.$
&c.

His positis, Si $b = 1$, manifestum est numerum $a = 1$, esse quadratorum quæsitorum unum; quippe tum $na^2 = c^2a^2 - ba^2 = c^2 - 1$. Quod contingit in numeris 3, 8, 15, &c. qui a quadrato unitate deficiunt.

Si vero b sit unitate major, manifestum est ba^2 esse majorem unitate; &, frustra quæri in illa columnâ defectûs numerum 1. (Haberi tamen ibidem quandoq; potest numerus qui hunc exhibeat

exhibeat, ut deinceps dicetur.)

Procedendum itaq; erit in columnam ſecundam, & deinceps in tertiam, quartam, &c. ut res poſtulabit; donec tandem reperiatur in aliqua columna numerus 1; vel ſaltem alius qui numerum illum, ut poſt docebitur, exhibebit.

In columnam autem ſequentem tranſibitur, cum primum in præſente columna, *defectus* vel æquat vel ſuperat duplum radicis adjacentis quadrati: Tunc enim ſumpta radice proxime minore, defectus minuendus erit utriusq; radicis aggregato. Ut, in adjacente exemplo pro numero dato 7; reperitur ordine tertio $7\mathcal{Q}3. - \mathcal{Q}9, - 18$. Cum itaq; 18 ſit duplus radicis adjacentis 9, pro $\mathcal{Q}9, - 18$, ſubſtituo in columna ſequente $\mathcal{Q}8, - 1$. ubi ſtatim conſpicitur *defectus* 1, quæſitus: adeoq; numeri 3 quadratus eſt quadratorum quæſitorum unus; quippe $7\mathcal{Q}3, = 7 \times 9 = 63 = \mathcal{Q}8, - 1$. Continuatâ vero eâdem columnâ, repetietur ordine ſexto $\mathcal{Q}17, - 37$. pro quo in ſequente columna ſubſtituo $\mathcal{Q}16; - 4$. (Quia nempe $\mathcal{Q}17, - \mathcal{Q}16. = 17 + 16. = 33 = 37 - 4$. Et ſic ſemper. Duorum enim quadratorum continue proximorum, differentia eſt utriusq; radicis aggregatum.) Ubi conſpicitur $7\mathcal{Q}6$. $(= 252) = \mathcal{Q}16, - 4$. Quia vero *defectus* 4, eſt aliquota pars radicis adjacentis 16, manifeſtum eſt eundem 4 a fortiori eſſe aliquotam partem dupli rectanguli ſub radicibus 6, & 16. Numero itaq; $2 \times 6 \times 16 = 192$, per 4 diviſo, quotiens 48 radix eſt alius ex quæſitis quadratis. Nempe $7\mathcal{Q}48 = 7 \times 2304 = 16128 = \mathcal{Q}127, - 1$. Habetur itaq; jam alius ex quæſitis. Sed & jam ſtatim ab initio, in columna prima; cum habeatur $7\mathcal{Q}2 = \mathcal{Q}6, - 8$. manifeſtum eſt, *defectum* 8, metiri duplum rectangulum ſub 2 & 6. quippe $2 \times 2 \times 6 = 24$. & $8)24(3$. nempe radix quadrati ſuperius inventi. Sed & iterum in eadem columna prima ordine quarto, habetur $7\mathcal{Q}4. = \mathcal{Q}12,$

$$
\begin{array}{lll}
7\mathcal{Q}1. = \mathcal{Q}3, - 2. & & \\
2. = \mathcal{Q}6, - 8. & & \\
3. = \mathcal{Q}9, - 18. & = \mathcal{Q}8, - 1. & \\
4. = \mathcal{Q}12, - 32. & = \mathcal{Q}11 - 9. & \\
5. = \mathcal{Q}15, - 50. & = \mathcal{Q}14, - 21 & \\
6. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 17, - 37. & = \mathcal{Q}16, - 4. & \\
\text{\&c.} & & 14 \\
 & & 19, - 18. \\
 & & 18
\end{array}
$$

$= \square 12, -32$. & quia $2 \times 4 \times 12$ ($= 96$) divisus per 32, quotientem exhibet 3. habetur jam tertia vice ejusdem quadrati superiùs inventi radix. Quod & in eadem columnâ subinde sæpius continget, ut advertenti patebit. Nempe locis paribus, sive secundi multiplis. Imo & jam ipso loco primo, cum habeatur, differentia 2, erit ea aliquota pars dupli rectanguli $2 \times 1 \times 3$, quod per differentiam illam 2 divisum, exhibebit, ut prius, 3, radicem quadrati quæsiti; quod & similiter obtinget in singulis columnæ primæ locis.

Notandum autem est, non modo differentias 6, 10, 14, 18, &c. in columna prima; sed & 8, 12, 16, 20, &c. in secunda, & 14. 18, 22, 26, &c. in tertia, (& pariter in sequentibus omnibus) arithmetice proportionales esse, (in singulis utiq; communis excessus est 4, idem qui in columna prima:) ut facillimo negotio continuari possit columna quælibet, (sine operosa radicum eductione.) Sed & differentiæ item oblique sumptæ, ut 10, 8, & 14, 12, & 18, 16, 14, &c. sunt arithmetice proportionales, communis utique differentia est numerus 2: (quod & mutatis mutandis, conspicietur; quicunq; fuerit numerus n expositus:) ut facili item negotio fiat decolumna in columnam transitus. Atq; eisdem de causis, facile erit quemvis numerum in quavis columna (etiam omissis intermedijs) ad arbitrium exhibere, adeoq; operationes, ubi expedire videbitur per saltus continuare: Quod cum naturam progressionis arithmetice satis callentibus obvium sit, non opus est ut illud fusius ostendam.

Quod autem hactenus ostendi, sumpto quadrato t^2 majore quam est numerus n expositus: Id ipsum etiam eveniet sumpto quadrato minore. Non quidem ita ut exhibeatur ipse statim numerus quæsitus (uti cum primo repertus est $7 \square 3 = \square 8, -1$.) sed ut habeatur differentia quæ sit aliquota pars dupli rectanguli, (uti, cum; quia $7 \square 3 = \square 6, -8$, repertus est numerus 8, aliquota pars dupli rectanguli $2 \times 2 \times 6$. unde habetur quotiens 3, radix quæsiti quadrati.) Cum enim illud solum requiratur ut differentia $nr^2 \sim s^2$ dividat duplum rectangulum $2rs$, (non advertendo, uter duorum nr^2, s^2, sit numerus major,) perinde erit, quantum ad hoc negotium, num nr^2 unitate excedat quadratum, an unitate deficiat.

Exempli gratia, Exposito numero $n = 13$, reperietur ordine quinto

quinto, columnâ quarta, seu post primam tertia 13Q5. = Q18, + 1. Cum itaq; 1 differentia numerorum 13Q5, & Q18, dividat duplum rectangulum 2×5×18 = 180, quotientem item exhibens 180; erit

$$nQ1. = Qca, + ba^2$$

$$13Q1. = Q3, + 4$$

$$2. = Q6, + \overset{12}{16}. = Q7 \overset{14}{+} 3.$$

&c. $10, + \overset{22}{17}$

$$13, + 39. = Q14, + \overset{24}{12}$$

$$17, + 36. = Q18, + 1.$$

ille quadratorum quæsitorum unius radix. Utique 13×180×180 = 421200 = 649×649, − 1. (Quod autem hactenus assumpsimus proc^a quadratum vel proxime majorem vel proxime minorem dato numero; id arbitrarie factum est, nulla necessitate; nam & de quovis quadrato majore vel minore perinde procedunt omnia, Quod & in sequentibus intelligendum erit.)

Atq; hactenus satis expediisse videamur Problematis partem primam, nempe ut unum aliquem istiusmodi quadratum exhibeamus. Impossibile enim est, siquis istiusmodi omnino sit, ut non hoc pacto vel utrovis modo, vel saltem primo, detegatur.

Quoniam vero longum esse possit nonnunquam opus eo pervenire nisi compendio utamur; libet istiusmodi compendia, ex multis pauca, ad levandum calculum, insinuare.

Unum autem, idq; eximium, jam indicavimus, nempe si differentia $nr^2 \sim s^2$ dividat duplum rectangulum $2rs$. Quod quidem semper contingit quando differentia illa est vel 1 vel 2, nempe si nr^2 vel superet vel deficiat a quadrato quovis s^2, per numerum vel 1, vel 2. Nam ut 1 metitur quemvis numerum, sic & 2 quemvis parem, adeoq; $2rs$. sed & alias sæpe.

Alterum hoc esto. Quoniam ni conspiciatur $ba^2 = 1$, in prima columna (ut res statim absolvatur,) ut habeatur *defectus* 1, transeundum erit in columnas sequentes, unam vel plures, uti dictum est; Quota vero columna hoc contingat si constet, constabit

stabit statim de radice quadrati quæsiti. Cum enim, in prima columna, radix assumpti quadrati sit ca, in secunda $ca-1$, in tertia $ca-2$. &c. ut patet (nempe in priori forma processus, ubi sumitur c^2 quadratus proxime major quam n: de formâ posteriore post dicetur.) manifestum est radicem quadrati in quavis columna tot unitatibus minorem esse quam est radix quadrati in columna prima, quot illa locis a prima distat: quæ distantia sive differentia dicatur d, adeoq; radix quadrati in qualibet columna $ca-d$. cujus quadratum $c^2a^2-2cda+d^2$ cum quadratus c^2a^2 excedat numero $2cda-d^2$ eodem minuendus erit adjunctus defectus ba^2, (ut nempe utrobique differentia eadem sit, nempe $=na^2$.) erit itaq; $ba^2-2cda+d^2$. Vellem autem ut defectus sic minutus sit 1. Ponendum igitur $ba^2-2cda+d^2=1$, & (transponendo) $d^2-1=2cda-ba^2$. adeoq; $\frac{d^2-1}{b}=\frac{2cd}{b}a-a^2$. & (resolvendo æquationem) $a=\frac{cd}{b}\pm\sqrt{:\frac{c^2d^2-bd^2+b}{b^2}}=\frac{cd\pm\sqrt{:c^2d^2-bd^2+b}}{b}=\frac{cd\pm\sqrt{:nd^2+b}}{b}$: (nempe propter $c^2=n+b$, adeoque $c^2-b=n$, & $c^2d^2-bd^2=nd^2$) adeoque cognito d, cognoscitur a.

His positis. Ut cognoscatur d, quærendum erit, (eodem modo quo prius de a dictum est) quis quadratus ductus in numerum datum, assumpto numero b, faciat quadratum; (ut nempe $\sqrt{:nd^2+b}$: sit numerus rationalis integer) quod quamvis videatur nihilo facilius reperiri posse quã quod primum petebatur; tamen hinc magnum futurum operæ compendium, certum est, quia d (numerus columnarum post primam) minor semper erit quam a (numerus unitatum in quæsiti quadrati radice) ut per se patet: adeoq; citius eo pervenietur ubi habebitur defectus b, quam ubi defectus 1. Exempli gratia. Exposito numero $n=13$, adeoque $13Q1, =Q4, -3$. Non ante locum 180 reperietur defectus 1. (ubi nempe $13Q180, =Q649, -1$.) adeoque $a=180$. At reperietur defectus $b=3$, loco saltem 71 (nempe $13Q71, =Q256, -3$) adeoq; $d=71$. (qui statim exhibebit $a=180$ ut prius) unde manifestum est plus dimidio operis abscindi.

Si tamen contingat, quod & quandoq; fit, ut numerus d sic

primo

primo inventus non exhibeat a numerum integrum, sed fractum, adeoq; præsenti negotio non accommodum; procedendum erit ad secundum, vel etiam tertium, aliumve ejusmodi d qui exhibeat a integrum. quod & in sequentibus intelligendum erit.

Quodsi neq; hæc operationis contractio satis expedita videatur; cum nonnunquam etiam satis tarde ad ipsum d perveniatur: Etiam hæc iniquisitio eadem arte adjuvanda erit atque præcedens. Uti enim prius ad inveniendum a, quærebatur, quota columna reperiendus erat imperatus defectus 1; ita jam quærendum, quota columna reperietur defectus b. Nempe, cum (propter $c^2 = n^2+b$) sit $na^2 = c^2d^2 - bd^2$, sitque bd^2 defectus justo major, (saltem, nisi sit $d=1$; quippe jam quæritur defectus b;) minuendus erit quadratus c^2d^2, uti prius minuimus quadratum c^2a^2, ut defectus pariter minutus sit b. Sicut itaque pro quadrati radice ca substituimus $cd-e$; ita jam pro cd substituamus $ed-e$, (ut sit e numerus columnam innuens qua reperiatur defectus b.) Erit autem, quadratorum ex his radicibus, differentia $2ced - e^2$ quæ pariter ex defectu bd^2 sublata relinquet $bd^2 - 2ced + e^2 = b$. adeoq; $e^2 - b = 2ced - bd^2$, & $\frac{e^2-b}{b} = \frac{2ce}{b}d - d^2$.

Et (resolvendo æquationem) $d = \frac{ce \pm \sqrt{:c^2e^2 - be^2 + b^2:}}{b} = \frac{ne \pm \sqrt{:ne^2+b^2:}}{b}$. Exempli gratia. Exposito, ut prius, $n=13$. reperietur ordine vicesimo octavo; $13\ Q\ 28, = Q\ 101, -9$. & propterea (quia $9 = b^2$) erit $e = 28$. qui exhibebit $d = 71$, & $a = 180$. Adeoq; quem laborem prius a loco 180, ad locum 71, retraxeram, jam videas ad locum 28 retractum.

Sed & eadem methodo, etiam adhuc magis retrahamus. Quippe eodem modo ostendetur, siquando res postulet, ulterius adhuc contrahendum negotium. Nam uti ostendimus $\frac{cd \pm \sqrt{:na^2+b:}}{b} = a$. & $\frac{ce \pm \sqrt{:ne^2+b:}}{b} = d$. Ita ostendetur $\frac{cf \pm \sqrt{:nf^2+b^2:}}{b} = e$ & $\frac{cg \pm \sqrt{:ng^2+b^2:}}{b} = f$, & $\frac{ch \pm \sqrt{:nh^2+b^2:}}{b} = g$, & sic deinceps. Vt jam eò redigatur negotium; ut in processu

ut

ut prius inchoato, observemus, siquando *defectus* occurrat, vel x, vel z, vel etiam alius quilibet qui metiatur duplum rectangulum $2rs$ supra memoratum; (nam ubi hoc occurrit rem fatis absolvi jam supra dictum est;) vel etiam b, ejusve ulla potestas, puta b^2, b^3 &c. Ubi enim occurrit defectus b, habetur d; ubi b^2, habetur e; ubi b^3, habetur f; & sic deinceps. Horum autem uno cognito, reliquos retrocedendo exhiberi satis patet; nisi saltem hoc pacto prodeant numeri fracti; quod ubi contingit ulterius adhuc in incepto examine procedendum erit, ut supra monitum est. Exempli gratia. Exposito, ut prius, $n = 13$. Conspicitur ordine undecimo, (columna post primam quarta) $13\,Q11, = Q40, - 27.$ adeoque (quia $27 = b^3$) erit $11 = f$, qui exhibebit $e = 28$, adeoq; $d = 71$, & $a = 180$. ut supra. Negligimus autem, in columna prima, tum defectum 3 loco primo, tum defectum 27 loco tertio, tum &, loco octavo, columnâ post

$13\,Q1. = Q4, - 3.$
$2. = Q8, - 12.$
$3. = Q12, - 27. = Q11, - 4.$
$4. = Q16, - 48. = Q15, - 17.$
&c. $19, - 36.$
$23, - 61. = Q22, - 16.$
$26, - 39.$
$30, - 68. = Q29, - 9.$
$33, - 36.$
$37, - 69.$
$41, - 108. = Q40, - 27.$

primam tertia, defectum 9: quia, quovis horum sumpto, pro direct. numerus fractus; (nempe vel 0, vel $\frac{1}{3}$, vel saltem $\frac{4\pm4}{9}$) adeoque huic negotio non accommodus. Retractum itaq; jam est negotium, a loco 180, ad locum 11. Non autem, in præsenti numero exposito, ulterius retrahetur negotium, nisi saltem ad columnas his superiores transeatur. Cum enim numerus $f =$ 11, ut jam dictum est, reperietur ordine undecimo, columna post primâ quarta; est quidem $g = 4$ (nempe $13\,Q4, = Q17, - 81$) verum in nulla ex his columnis reperiendus, sed ea quæ harum prima proxim

proxime est superior; quippe $17 = ca + 1$. (quod & a fortiori de sequentibus h, i, &c. judicandum erit.) Vel etiam $g = 84$, (quippe $13Q84, = Q303, -81$,) qui quidem exhibebit (non modo $f = 213$, sed &) $f = 11$, (sed (ut patet) serius occurrit, quam ipse f.

Nec erit fortassis incommodum hic notare; ut ex cognito, verbi gratia, d, cognoscitur a; sic vice versa ex cognito a cognoscitur d; (& in reliquis pariter.) Quippe, cum sit (ut supra ostensum est) $ba^2 - 2cda + a^2 = 1$: erit (ordinando & resolvendo æquationes) tum $a = \frac{cd \pm \sqrt{:nd^2 + b:}}{b}$ (ut jam dictum est) tum $d = ca \pm \sqrt{;na^2 + 1}$. Eodem modo; Quia $bd^2 - 2ced + e^2 = b$; erit, tum $d = \frac{ce \pm \sqrt{:ne^2 + b}}{b}$ tum $e = cd \pm \sqrt{:nd^2 \pm b}$. & in reliquis similiter.

Sed & hinc etiam sequitur, $ba = e$, (& similiter $bd = f$, $be = g$, &c.) cum enim sit $a = \frac{cd \pm \sqrt{:nd^2 \pm b:}}{b}$ erit $ba = cd \pm \sqrt{;nd^2 b:} = e$. (& similiter in reliquis.) Cum hoc tamen discrimine, quod, quantitatis utrobique ambigue designatæ, in altera major, in altera minor designatio, fit præsenti negotio magis accommoda. Nam, verbi gratia, si sumatur $ba = cd - \sqrt{:nd^2 + b}$; erit a, vel numerus fractus (nempe si b non metiatur numerum $cd - \sqrt{:nd^2 + b}$) vel (si integer) citius occurret (sic ut dictum est inquienti) quam ipse a, vel e. Et contra, si pro e sumatur quantitas major, nempe $cd + \sqrt{.nd^2 + b}$. (quamquam & sic fit numerus integer) serius occurret (sic investiganti) quam ipse a, utpote hoc major. Quod autem de a & e jam dictum est, perinde etiam valet de d & f, item de e & g, &c. Adeoque si ab invento (verbi gratia) e, retrocedendum sit ad inveniendos (per æquationes expositas) d, a, sumendæ sunt quantitates majores; sin progrediendum ad sequentes f, g, &c. sumendæ quantitates minores, ut præsenti negotio magis accommodæ.

Quam autem operis abbreviationem hactenus adhibuimus ubi quæritur na^2 unitate minor quadrato (adeoque sumitur c^2 major quam n;) eadem plane mutatis mutandis, adhibenda erit si quæretur na^2 vel m^2 unitate major quadrato, (sumpto c^2 quadrato proxime minore;) vel etiam si quæratur

na^2 vel nr^2 qui quadratum superet, vel ab eo deficiet, binario. (Quanquam enim hoc pacto a^2 non sit quadratus primo quæsitus, eundem tamen exhibebit ut supra dictum est;) Res utique ad hanc formam prodibit.

Si na^2 à quadrato unitate deficiat.

$b] cd \pm \sqrt{;nd^2+b;} [a.$
$b] ce \pm \sqrt{;ne^2+b^2;} [d.$
$b] cf \pm \sqrt{;nf^2+b^3;} [e.$
$b] cg \pm \sqrt{;ng^2+b^4;} [f.$
$b] ch \pm \sqrt{;nh^2+b^5;} [g.$
&c.

Si quadratum unitate superet.

$b] \sqrt{;nd - b;} = cd. [a.$
$b] \sqrt{;ne^2+b^2;} = ce. [d.$
$b] \sqrt{;nf^2 - b^3} = cf. [e.$
$b] \sqrt{;ng^2+b^4} = cg. [f.$
$b] \sqrt{;nh^2 - b^5} = ch. [g.$
&c.

Si binario deficiat.

$b] cd \pm \sqrt{;nd^2+2b.} [a.$
$b] ce \pm \sqrt{;ne^2+2b^2.} [d.$
$b] cf \pm \sqrt{;nf^2+2b^3.} [e.$
$b] cg \pm \sqrt{;ng^2+2b^4.} [f.$
$b] ch \pm \sqrt{;nh^2+2b^5.} [g.$
&c.

Si binario superet.

$b] \sqrt{;nd^2 - 2b;} = cd. [a.$
$b] \sqrt{;ne^2+2b^2;} = ce. [d.$
$b] \sqrt{;nf^2 - 2b^3;} = cf. [e.$
$b] \sqrt{;ng^2+2b^4;} = cg. [f.$
$b] \sqrt{;nh^2 - 2b^5;} = ch [g.$
&c.

Atque ad eandem formam procedendum esset si investigandus esset na^2 quovis numero vel à quadrato deficiens, vel quadratum superans. (Intellige, quatenus res est possibilis: Non enim universaliter verum est, de quovis numero, etiam non-quadrato, ut in quadratum integrum ductus datâ qualibet differentiâ quadratum aliquem vel superet, vel ab eo deficiat.) Quoniam verò in præsenti negotio certum est tum 1, tum 2, dividere quemvis 2rs, non autem de aliis numeris id certò vel universaliter constet; his saltem attendisse sufficiet. Adeoque si (calculo ut supra instituto) inveniatur na^2 qui a quadrato aliquo differat numeris 1, vel 2, aliave parte aliquota dupli rectanguli sub radicibus; vel qui à quadrato *deficiat* numero b (differentiâ numeri dati à quadrato aliquo majori) ejusve quâvis potestate, aut cujusvis etiam potestatis duplo; vel denique qui quadratum *superet* numero b (differentiâ numeri dati à quadrato aliquo *minori*,) ejusve duplo, vel ipsius quavis potestate

ſtate à numero *impari* denominata hujuſve duplo, aut *deficiat* poteſtate à numero *pari* denominata, aut hujus duplo. Ubi enim horum quicquam contingit, habebitur vel numerus a, radix quadrati quæſiti, vel qui illum ſtatim exhibebit; vel ſaltem ex numeris d, e, f, &c. aliquis qui retrocedendo exhibebit a; niſi ſi quando ſic inventus a prodeat numerus fractus, quo caſu ulterius procedendum erit ut ſupra dictum.

Exempli gratia. Expoſito numero $n = 149$; (ſumpto $c = 12$, adeoque $b = 149 - 144 = 5$;) reperietur loco decimo ſeptimo, columna tertia, ſive poſt primam ſecundâ (neque enim neceſſe erit ultra locum decimum ſeptimum procedere) $149 \mathcal{Q} 17 = \mathcal{Q}306{,}+625$, adeoque propter $625 = b^4$) erit $g = 17$. unde retrocedendo, reperietur $f = 82$, $e = 397$, $d = 1922$, & tandem a vel $r = 9305$; cujus quadratus in n ductus, cum quadratum unitate ſuperet, (nempe $149 \times 9305 \times 9305 = 129008707\,25 = \mathcal{Q}113582$, $= 1$. ſive $\mathcal{Q}1 - 1$.) duplum rectangulum $2rs = 2 \times 9305 \times 113582$, per $m^2 - s^2 = 1$ diviſum, exhibebit $21137610\,20 = a$ radicem quadrati quæſiti, qui in $n = 149$ ductus, unitate minor erit quadrato numeri 25801741449. (Atque id ipſum obveniſſet, ſi, neglecto loco decimo ſeptimo, proceſſum eſſet ad locum 82, vel 397, &c. ubi haberentur $f = 82$, & $e = 397$, &c.) Habemus itaque jam ordine 17°, numerum illum, qui, dictâ methodo, numerum quæſitum exhibet ſatis grandem; minimus utique ex quadratis quæſitis rem imperatam abſolventibus figuris ſaltem 19 ſcribendus erit; nempe 44679856496714404\,00 (quadratus numeri 21137610\,20, ut dictum eſt) qui in 149 ductus, unitate minor erit quam 665729861801044619601 quadratus numeri, 25801741449.

Atque hæc de preſenti operis abbreviandi methodo, ſatis ſuperque dicta videantur, quanquam & haud ignorem etiam adhuc plura adjungi poſſe (quæ & hanc abbreviationem abbreviarent) ni meturem ne nimis prolixus eſſem.

Putaſſem etiam & aliam adjunxiſſe abbreviandi methodum. Nempe, quo pacto poſſimus dictam inveſtigationem per ſaltus continuare; (quod, ubi res in longum ſit tranſitura, uti quandoq; evenit, uſui eſſe poſſit,) ita quidem ut aliquando nè centeſimum quemque locum opus ſit examinare. Verum illud neque mihi jam neceſſum videtur, ne nimius ſim; vel, ſi tu inſuper & illud exigas, alias fiet.

quod ſupereſt: Expoſitâ jam, uti fusè factum eſt, methodo inveſtigandi unum aliquem quadratum negotio accommodum, qui nempe in expoſitum numerum ductus, aſſumpta unitate, conficiat quadratum. Oſtendendum inſuper eſt, qua methodo iſtiuſmodi infinitos exhibeamus, nedum omnes poſſibiles. quod tamen quam breviſſime fiet. Neque enim ego tua tibi exponendo prolixus eſſe debeam.

Jam ſupra dictum eſt; Quoties differentia $nr^2 \sim s^2$ eſt aliquota pars dupli rectanguli $2rs$; ſi hoc per illam dividatur, quotiens erit radix quadrati accommodi. Eſto igitur jam cognitus, (ex inveſtigatione ſupra tradita) unus aliquis quadratus negotio accommodus, qui jam dicatur t^2. Quoniam igitur, ex hypotheſi, nr^2+1, eſt numerus quadratus, dicatur s^2. Cum itaque ſit $nr^2+1=s^2$, erit $nr^2-s^2=1$. Et propterea, cum 1 nullum nonmetiatur numerum integrũ, certum eſt & differantiã hanc $nr^2-s^2=1$, metiri duplum rectangulum $2rs$; adeoque quotiens diviſione emergens erit radix ſecundi quadrati negotio item accommodi. Et eodem modo ex hoc ſecundo inveſtigabitur alius, & ex illo alius, & ſic in infinitum.

Atque hæc quidem ſolutio, quamquam abunde ſatisfaciat quæſito, infinitos iſtiuſmodi poſtulanti: non tamen omnino omnes poſſibiles exhibet. Exempli gratia. Expoſito numero $n=3$, erit quadrati primi radix 1, unde colligitur ſecundi radix 4, atqueinde ſequentium 56, 10864, 4088557776, &c. Cum interim alii omittantur intermedii plurimi, nempe quadrati radicum harum, 15, 209, 780, 2911, 40545, 151316, 564719, 2107560, 7865521, 29354524, 109552575.

Has autem intermediorum radices hæc exhibebit Regula. Sit n, numerus expoſitus; r, radix quadrati primi ſeu minimi (negotio accommodi) modo ſuperius tradito jam inventi; & $1=2\sqrt{:n^2+1}$, erit radix primi, r, vel r in 1; ſecundi, r in t; tertii, r in t^2-1; quarti, r in t^3-2t; quinti, r in t^4-3t^2+1; & reliquorum deinceps juxta ſeriem adſcriptam. (Cujus quidem conſtructio etiam primo aſpectu,

r in 1.	r in 1.
t.	t.
t^2-1.	u.
t^3-2t.	x.
t^4-3t^2+1.	y.
t^5-4t^3+3t.	z.
$t^6-5t^4+6t^2-1$.	a.
&c.	&c.

aſpectu obvia eſt: ſaltem ſi illud innuatur; numeros locis primis adſcriptos, ſubintellectos ſaltem, eſſe monadicos, 1,1,1,&c. ſecundis lineares, 1,2,3, &c. ex continua monadicorum additione ortos, 1 + 1 + 1 &c. tertiis triangulares, 1, 3, 6, &c. ex continua additione linearium 1 + 2 + 3, &c. quartis pyramidales, 1, 4, 10, &c. ex continua additione triangularium, 1 + 3 + 6 &c. Et ſic deinceps.) Vel etiam, ſi pro t, t^2-1, t^3-2t, &c. ſtatuamus t, u, x, &c. erit $u=tt-1$, $x=tu-t$, $y=tx-u$, $z=ty-x$ &c. nempe conſtat quilibet ex præcedentium ultimo in t ducto, dempto penultimo. Vel denique (nam & hæc forſan deſignatio placebit potius nonnullis) ſi numerus expoſitus ſit, verbi gratia 3; fiet eadem ſeries ad hanc formam;

$$3 \text{ in } Q: 1 \times 3^{\frac{1}{1}} \times 3^{\frac{3}{8}} \times 3^{\frac{11}{42}} \times 3^{\frac{41}{156}} \times 3^{\frac{153}{571}}, \text{ &c.}$$

Sic expoſito $n=2$, fiet ſeries

$$2 \text{ in } Q: 2 \times 5^{\frac{1}{1}} \times 5^{\frac{1}{6}} \times 5^{\frac{29}{169}} \times 5^{\frac{169}{2030}} \times 5^{\frac{985}{11969}}, \text{ &c.}$$

Ubi cognitis radicum prima & ſecunda (ut prius) reliquæ ea ratione conſtituuntur ut Fractionum ſequentium Numerator æquet ubique denominatorem ſuum dempto denominatore proxime præcedente; Denominator autem æquet numeratorem termini proxime præcedentis in impropriam fractionē reducti.

Hæc autem ni ſatis ſuperque ſufficiant præſenti negotio expediendo; etiam hoc licet adjicere. Inventa hujuſmodi ſerie qualibet, quæ numero cuivis non-quadrato, puta $n-2$, conveniat; habentur ſtatim ſeries quæ conveniant, ejuſdem numeri per quemvis quadratum multiplo, puta nm^2, nempe dividendo ſeriem radicum jam inventam per iſtius quadrati radicem m. Hoc pacto;

$$2, \text{ in } Q: 2 \times 5^{\frac{1}{1}} \times 5^{\frac{1}{6}} \times 5^{\frac{29}{335}} \times 5^{\frac{169}{2030}} \times 5^{\frac{985}{11969}}, \text{ &c.}$$

$$8, \text{ in } Q: 1 \times 5^{\frac{1}{1}} \times 5^{\frac{1}{6}} \times 5^{\frac{29}{335}} \times 5^{\frac{169}{2030}} \times 5^{\frac{985}{11969}}, \text{ &c.}$$

$$18, \text{ in } Q: 4 \times 33^{\frac{1}{1}} \times 33^{\frac{33}{34}} \times 33^{\frac{1122}{11555}}, \text{ &c.}$$

$$32, \text{ in } Q: 3 \times 33^{\frac{1}{1}} \times 33^{\frac{33}{34}} \times 33^{\frac{1122}{11555}}, \text{ &c.}$$

$$50, \text{ in } Q: 14 \times 197^{\frac{1}{1}} \times 197^{\frac{197}{1211}}, \text{ &c.}$$

72, in Q: $2 \times 33\frac{3}{1} \times 33\frac{33}{144} \times 33\frac{1121}{1153}$, &c.

98, in Q: $10 \times 197\frac{1}{1} \times 197\frac{197}{198}$, &c.

128, in Q: $51 \times$

162, in Q: $1540 \times$

200, in Q: $7 \times 197\frac{1}{1} \times 197\frac{197}{198}$, &c.

242, in Q: $1260 \times$

288, in Q: $1 \times 33\frac{1}{1} \times 33\frac{33}{144} \times 33\frac{1121}{1153}$, &c.

Hoc eſt.

2, in Q:	2,	12,	70, 408, 2378,	13860. &c.
8, in Q:	1,	6,	35, 204, 1189.	6930 &c.
18, in Q:	4,	136,		4620. &c.
32, in Q:	3,	102,		3465. &c.
50, in Q:		14,		2772 &c.
72, in Q:	2,	68,		2310 &c.
98, in Q:		10,		1980. &c.
128, in Q:		51,		
162, in Q:				1540 &c.
200, in Q:		7,		1386. &c.
242, in Q:				1260. &c.
288, in Q:	1,	34,		1155. &c.

Ubi videre eſt, nunc ſingulos, nunc alternos, nunc tertium quemq; ſeriei numerũ, vel etiam quartum, quintum, &c. diviſionis hujuſce capacem eſſe. Et ſimiliter de aliis numeris judicandum erit.

Sed nec incommodum erit monere, quod et ſupra innuimus, (quamquam à præſenti negotio alienum,) ſi in expoſita quæſtione, pro *adſcita unitate*, dixiſſet *adſcito quovis numero quadrato*, puta k^2; ſeries quadratorum quos jam invenimus, ducendæ eſſent in datum illum quadratum k^2; (ſive, quod tantundem valet, quadratorum radices ducendæ eſſent in k) exempli gratia. Quoniam, expoſito numero $n=2$, ſi petatur ut na^2 unitate deficiat à quadrato, erit $na^2=2$ in Q: 2, 12, 70. &c.

ſi

si peteretur ut na^2 numero novenario à quadrato deficiat, esset $na^2=2$ in 9 Q: 2, 12, 70, &c. Quæ quidem series infinitos semper quadratos exhiberet rem imperatam præstantes, utut non semper omnes. Verum hoc monuisse sufficiat.

Atque hæc præcipua sunt eorum quæ de hoc negotio dicenda putavi; quæ mandatis tuis obsequens in hanc collegi summam. Id superest, ut siquid admissum sit quo minus omnia ex voto tuo fuerint, benignus condones; solitoque tuo favore prosequi ne dedigneris,

Oxoniæ Decem. 17. 1657.

Insignissime Domine,
Dnis. Væ. Observantissimum,

Johannem Wallis.

POstquam exaraveram reliqua, visum est & hanc tuam subjungere methodum investigandi primum quadratum, alia plane forma quam quæ supra habetur. Esto, verbi gratia, expositus numerus non-quadratus $n=13$, et quadratus quæsitus a^2, adeoque $13a^2+1$ numerus quadratus. Erit

$13a^2+1=9a^2+6ab+b^2$

Hoc est $4a^2+1=6ab+b^2$

Est ergo $2b>a>b$.

Esto $a=b+c$. *Adeoque*

$4b^2+8bc+4c^2+1=6b^2+6bc+b^2$

Hoc est $2bc+4c^2+1=3b^2$

$2c>b>c$

$b=c+d$.

$2c^2+2cd+4c^2+1=3c^2+6cd+3d^2$

$3c^2+1=4cd+3d^2$

$2d>c>d$

$c=d+e$

$3d^2+6de+3e^2+1=4d^2+4de+3d^2$

$2de+3e^2+1=4d^2$

$2e>d>e$

$d=e$

$$d = e + f$$
$$2e^2 + 2ef + 3e^2 + 1 = 4e^2 + 8ef + 4f^2$$
$$e^2 + 1 = 6ef + 4f^2 =$$
$$7f \triangleright e \triangleright 6f$$
$$e = 6f + g$$
$$36f^2 + 12fg + g^2 + 1 = 36f^2 + 6fg + 4f^2$$
$$6fg + g^2 + 1 = 4f^2 =$$
$$2g \triangleright f \triangleright g$$
$$f = g + h$$
$$6g^2 + 6gh + g^2 + 1 = 4g^2 + 8gh + h^2$$
$$3g^2 + 1 = 2gh + gh^2 =$$
$$2h \triangleright g \triangleright h$$
$$g = h + j$$
$$3h^2 + 6hj + 3j^2 + 1 = 2h^2 + 2hj + 4h^2$$
$$2j = h$$
$$j = 1.$$

Ergo $j = 1.$
$h = 2.$
$g = 3.$
$f = 5$
$e = 33.$
$d = 38.$
$c = 71.$
$b = 109.$
$a = 180.$

Atque eodem modo procedendum erit exposito quovis numero non quadrato.

EPI-

EPISTOLA XVIII.

D. Joh. Wallis *ad* D. *Kenelmum Digby*

Illustrissime Domine,

ACcepi nudiustertius, sero vesperi, quem heri perlegebam, D. Frenicli de Problematis Fermatianis. Tractatum, a Dno Va, ad Honoratiss. D. Vicecomitem *Brouncker* nuper transmissum, qui & eundem mihi dignatus est impertire: quem nec prius videram, nec inaudiveram de eo quidquam, quam ex receptis Honoratiss. Vice-Comitis literis hoc fuerim edoctus.

Certum autem est, ex tractatu illo, Clarissimum Virum, vel non vidisse literas nostras Parisios tibi missas, (quod malim existimare,) vel parum candide egisse (nobiscum, dicam? an) cum gente nostra.

Incipit jam statim ab insultu in gentem nostram, nec solum nostram, sed Belgas, nedum & Gallorum suorum reliquos conjungit. *En* inquit *tibi, Vir Illustrissime, Lutetia præbet quam neq; Angli tui, neq; Belgæ, usq; modo præstare potuerunt Problematum solutionem; Gestit Gallia Celtica palmam Narbonensi præripere. &c.* Sed & subinde sæpius subinnuit, *Alios plerosq; Mathematicos tam in Anglia quam in Batavia eorum solutioni operam dare;* vel etiam *in his solvendis insudare;* sed & *in cassum ab Anglis & Batavis se expectasse, cum nihilonimus pleriq; in hæc insudarint:* atq; ejusmodi alia.

De Gallis Batavisq; quid dicendum sit, mea minus interest solicitum esse, ut qui quid apud illos factum sit ignorem. De Anglis tuis est quod dicam. Et primo quidem, etiamsi nihil hac in re ab Anglis factum fuisset, cur tamen de gente nostra triumphum agat nihil est; cum ne centesimus quisque ex nostris Mathematicus, vel hæc aggressus est problemata, vel de illis inaudiverat quicquam, nedum *in ijs solvendis plerique insuderint.* Nescio enim, si D. Vice-Com. *Brouncker* & meipsum excipias, num ex Anglis quisquam Mathematicus, vel unam horulam his solvendis impenderit, vel de illis omnino quidpiam cogitaverit; certe quotquot ego noverim (quantum hactenus intelligo) vel ea penitus ignorarunt, vel negligebant saltem. Non enim, si privatis forte literis dixerit Vir Nobilissimus se omnibus Europæ

Mathematicis ea proponere, existimandum erit eadem statim & omnibus innotescere, nedum ut se protenus ad id operis accingant.

Nos autem quod attinet duos, Fatemur equidem fieri posse ut Clariss. Vir ea prius solverit problemata (duo saltem priora) quam utervis nostrum. Neque id mirum, quippe jam duobus ante mensibus solverat (uti videtur) quam fuerint omnino huc allata: Perhibetur enim ea jam 10 *Cal. Febr. st. n.* solvisse, quæ (uti mihi videantur nominatim inscripta) neuter nostrum viderat ante 2 *Nonas Mart. st. vet.* (nempe post 8 integras septimanas, biduo minus.) quippe tum nuperrime Parisijs, Londinum allata, Oxonium paulo adhuc serius transmittebantur.

Quid autem hac in re tum demum præstitimus, non opus est ut iterato multis ostendam, cum id jam præcedentibus literis nostris aliquoties indicatum tibi fuerit. Quia vero sparsim ea atque aliis immista, (nam & de aliis pluribus, & quidem majoris momenti rebus ab eodem D. Fermatio interrogati fuimus, iisque respondimus,) quæ de hoc negotio scripta fuerint, reperiantur; commodum esse videatur eorum summam colligere, & simul conspiciendam exhibere; ut videatur quam immerito vel de nobis vel de gente nostra triumphetur. Sed & (quia de *n. o. a* aliquoties postulari videamur) momenta temporis notanda duximus.

Priora duo problemata his erant verbis expositа.

Proponatur (*si placet*) Wallisio, *& reliquis Angliæ Mathematicis sequens quæstio numerica.*

Invenire Cubum, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat quadratum. Ex. Gr. Numerus 343 *est cubus a latere* 7. *omnes ipsius partes aliquotæ sunt* 1, 7, 49. *quæ adjunctæ ipsi* 343, *conficiunt numerum* 400. *qui est quadratus a latere* 20. *Quæritur alius cubus numerus ejusdem naturæ.*

Quæritur etiam numerus Quadratus qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat numerum Cubum.

Has solutiones expectamus; quas si Anglia, aut Gallia Belgica, & Celtica non dederint, dabit Gallia Narbonensis; easq; in pignus nascentis amicitiæ Dom. Digby *offeret & dicabit.*

Hæc chartula (ne moræ incusemur) per D *White* (per quem erat Parisijs ad nos deferenda) Londini tradebatur D. Vicecom.

com. Brouncker, Martij 4. stilo veteri; a quo postridie transmissa Oxonium appulit Mart 6. sero vesperi; cui protinus responsum dedi, per Veredarium postridie jam multo mane abeuntem Londinum perferendum. Cujus hæc fere summa.

Quæstiones expositas ejusdem fere generis esse cum iis quæ de numeris perfectis (ut loquuntur) & Deficientibus aut Redundantibus proponuntur, quæque ad universalem aliquam æquationem, quæ ad omnes casus respiciat, vix aut ne vix reducuntur. Utriq; autem satisfacere unum eundemque numerum 1, ut qui tum quadratus est, tum cubus, & partes aliquotas nullas habet. Subjuncto simul, problemate, horum simillimo, (cui necdum quicquam responsi nactus sum) *Invenire duos numeros quadratos, qui partibus suis aliquotis additi eandem efficiant summam. Ex. g.* $16+8+4+2+1=31=25+5+1$. *Inveniantur hujusmodi alii duo.*

Solutioni huic nostræ, subjunxit deinceps suam Honoratissimus Vicecomes, nempe, *Non modo numerum ipsum 1, sed & (si fractiones admittantur) eundem per cujusvis integri potestatem sextam dividi: Et quidem, quod ad priorem quæstionem, numerum item 343 sic dividi. Puta* $2\frac{42}{64}$. *Siquidem numerus fractus cum partes non alias habeat actuales quam quæ toti sunt cognomines, non alias habebit partes aliquotas expositus cubus* $\frac{343}{64}$ *quam* $\frac{1}{64}$, $\frac{7}{64}$, $\frac{42}{64}$, *quæ cum ipso* $\frac{343}{64}$ *conficiunt* $\frac{400}{64}$ *numerum quadratum* Non est itaque cur conqueratur vel D. Frenicle, vel etiam D. Fermat, a nemine Anglorum Problematis satisfactum; cum nemo sit (quem scio) Anglorum qui ea aggressus est, quin & solverit.

Ea vero cum in promptu esset solutio, (nec nisi unus istiusmodi peteretur,) in immensis porro numeris ruspandum esse non censui. Neq; enim res ipsa (non magni, uti mihi videbatur, momenti) postulabat, neq; etiam, si vel ego maxime vellem, tum vacabat: Quippe occupatissimum me deprehendit ea quæstio, ad mortui fratris funera abiturientem.

Nondum autem a funere domum redux, (quod post duas, si memini, septimanas contigit,) D. Vicecomitem Londini compellans, ab eodem intellexi, se interea temporis jam aliam ab eodem D. Fermatio quæstionem accepisse; cui, post habitis prioribus, (ut quas, uti jam videtur, D. Frenicle jam ante solverat) magis confidebat Fermatius: eiq; se respondisse, suumque ad hanc una cum præcedentibus responsum D. White jam

tum exhibuiſſet; a quo, uti videtur, Pariſios ſtatim mittebatur: ut neq; ſit cur vel hic de mora inſimulentur.

Hæc autem tertia quæſtio, (poſt præmiſſam præfationem, *Quæſtiones pure Arithmeticas, vix eſt qui proponat, vix qui intelligat &c.* his erat verbis expoſita.

Dato quovis numero non quadrato, dantur infiniti quadrati, qui in datum numerum ducti adſcita unitate conficiant quadratum. &c. Sed Canonem generalem dato quovis numero non quadrato inquirimus &c.

Canonem qui petebatur generalem hunc exhibuerat Honoratiſſimus Vicecomes, demonſtratione ſua firmatum.

Sit N, *numerus datus quilibet, quadratus vel non-quadratus, integer aut fractus.* Q, *quilibet alius quadratus, (ſive integer ſive fractus.)*

$D = N \sim Q$, *differentia duorum* N & Q. *puta* $N - Q$, vel $Q - N$.

Canon. Eſt $N \times \frac{4Q}{D^2}, +1$, *numerus quadratus. Nam*

$$N \times \frac{4Q}{D^2} + 1 = \frac{4QN + D^2}{D^2} = \frac{Q^2 + 2QN + N^2}{Q^2 - 2QN + N^2} = \frac{Q+N}{Q-N} \frac{Q+N}{Q-N}$$

Solutionem hanc legitimam eſſe, nemo eſt qui dubitet, (modo intelligat:) ut nec legitime demonſtratam eſſe (quod tamen non petebatur.) Siquis tamen ob notas Analyticas hæreat: His habeat verbi expoſitam.

Si quadrati cujuſvis quadruplus, per quadratum ſuæ a numero expoſito differentiæ dividatur; prodibit quadratus requiſitus: qui nempe in expoſitum numerum ductus adſcita unitate, conficiet quadratum.

Huic ſimilem etiam alium Canonem, (ſed ſerius, quæſtionem utique tum non inaudiveram;) Pariſios ipſe miſi.

Sit, N numerus datus quilibet. A, quilibet ad arbitrium aſſumptus per quem Q quadratus quilibet dividatur: quotientem exhibens M; qui porro per 4P (cujusvis numeri quadruplum) diviſus quotientem exhibeat O; ſitq; D *duorum* OA, PN, *differentia. Eſt, inquam,* $\frac{MA}{D^2}$ *quadratus quæſitus.* Nam

$$\frac{MAN}{D^2} + 1 = \frac{MAN + D^2}{D^2} \quad \frac{O^2A^2 + \frac{1}{2}MAN + P^2N^2}{O^2A^2 - \frac{1}{2}MAN + P^2N^2} = \frac{OA + PN}{OA - PN} \times \frac{OA + PN}{OA - PN}.$$

Utrumvis horum Canonum aſſumat Fermatius, habebit non modo quadratos infinitos, verum & poſſibiles omnes, tum integros, tum fractos, qui in datum numerum ducti (ſive quadratum

tum sive non-quadratum, neque enim est cur quæstionem sic expositam ad solos non-quadratos determinet) adscita unitate conficient quadratum. Quod ipsum & a nobis antehac demonstratum est; ad hunc modum. Esto quadratus ille possibilis quicunq; (rem imperatam præstans) F^2. erit itaque ex hypothesi, NF^2+1 numerus quadratus. Esto L^2. Et sumatur $\sqrt{Q} = R = \frac{L+1}{F}$ erit inquam (juxta priorem Canonem) $\frac{4Q}{D^2} = F^2$.

Est enim $Q = R^2 = \frac{L^2+2L+1}{F^2}$. Sed & $NF^2+1 = L^2$, adeoque $L^2 - 1 = NF^2$, & $\frac{L^2-1}{F^2} = N$. Et propterea $D\ (= Q-N) = \frac{L^2+2L+1}{F^2} - \frac{L^2-1}{F^2} = \frac{2L+2}{F^2}$ Adeoque (quia $2R = \frac{2L+2}{F}$ erit $\frac{2L+2}{F^2}) \frac{2L+2}{F}$ $(F = \frac{2R}{D}$; hoc est $\frac{4Q}{D^2} = F^2$. quod erat demonstrandum. Atque id ipsum, si opus sit, de altero etiam Canone ostendetur.

Ostendimus itaque Canonem Generalem, qui petebatur; qui nempe Dato quovis numero, quadratos exhibeat numero infinitos, qui in datum numerum ducti, adscita unitate conficiant quadratum. Nec est cur non soluti Problematis postulemur.

Ostendebam etiam, ex abundanti, id ipsum eadem facilitate præstari, si pro *adscita unitate* dixisset, *adscito quovis numero quadrato*, puta Bq. Nempe pro $\frac{4Q}{D^2}$, pondendum esset $\frac{4Q}{D^2}B^2$. Sed hoc πάρεργον, quippe illud solummodo petebatur quod exhibuit primus Canon; qui jam statim post acceptam quæstionem Parisios mittebatur, eodem (ni fallor) Mense Mattio. Adeo ut neq; non soluti Problematis, neq; etiam moræ, simus postulandi.

Verum quidem est, jam tandem Mense Octobri, allatas esse ad me literas, quas ad D. Vestram scripserat Fermatius; quibus

bus partim innuebat, se D. Vicecomitis mentem haud satis assequuntum, (eo quod solutiones idiomate Anglicano scriptas, quippe ad D. White virum Anglum, parum intellexerit, nec adesset harum rerum gnarus qui fideliter exponat;) partim quod quæstiones propositas de solis numeris integris intellectas vellet: (quod erat quæstionis statum plane immutare; quippe de *Integris* antea ne γρὺ quidem;) partim etiam alia proposuit multa, ab hoc negotio plane aliena, quibus pariter respondendum erat, quod & factum est. Eram autem & tum temporis partim aliis detentus negotiis, partim etiam peregre abiturus, nec ante reditum Mense Novembri factum vacabat huic me accingere negotio: eodem itaque mense tum ad hæc, tum ad alia, fuse respondimus, (literis ad te datis Novemb. 21.) tum meo, tum & Honoratissimi Vicecomitis nomine: Et quidem si tantillum illud moræ, & necessariæ quidem, indulgeat, non est & adhuc cujus incusemur.

At interim, si vir Cl. idioma nostrum minus intellexerit, non & ideo problema minus est solutum. Nec magis culpandus erat Honoratissimus Vicecomes, quod Anglice scripserit ad Virum Anglum, quam Vir Clarissimus quod ipsius fere omnia etiam ad nos Gallice sint allata.

Quod autem de quadratis Integris jam tandem illud exponat, quod de Quadratis simpliciter fuerat propositum: Id nobis neutiquam est imputandum. Neque enim erat unde hariolemur sic intelligendum: præsertim cum & Diophantum in hisce se imitatum dixerit, apud quem per numeros quadratos nusquam non promiscue tum integri tum fracti intelliguntur.

Sed esto, De numeris integris intelligantur. Dicimus & sic solutas esse quæstiones. Ad primam utique & secundam, exhibuimus 1, numerum integrum, qui utriq; satisfaciat. Ad tertiam vero, Canonem qui petebatur exhibuimus Generalem qui tum Integros tum & Fractos omnes exhibeat quadratos negotio accommodos.

Ubi autem solos integros se voluisse dicat Fermatius, eosque infinitos, (quanquam ego illud prius nesciverim nec quidem suspicabar,) quo illi etiam hac ex parte satis factum sit jam ultimis literis Novembri datis ostensum est.

Ostendimus nempe, propositionē sic intellectam minus vniversalē esse,

esse, quam ut prius erat proposita: & saltem ad numeros non quadratos (quod & fecit Fermatius) restringendum esse. Si enim tum N, tum $\frac{4Q}{D^2}$ sit numerus quadratus integer, erit & $\frac{4QN}{D^2}$ integer quadratus, qui itaq; ab alio quadrato integro non poterit unitate sola differre.

Ostendimus item, quo casu unus aliquis quadratus exhiberi posset rem imperatam præstans, eodem & infinitos exhiberi posse; &, quo pacto ex uno cognito alii innotescant infiniti, itidem indicavimus. Quod vel ipsi D. Freniclo non ingratum fore credo; ut qui hoc totum negotium (utut in problemate præcipuum videatur) penitus omisit; neque enim de infinitis exhibendis quicquam habet vel Theorematice demonstratum, vel Problematice constructum; quorum nos utrumque præstitimus.

Ostendimus item quo pacto, ex infinitis quos exhibent quadratos expositi Canones nostri, integros a fractis secernamus. Nempe quoties $\frac{4Q}{D^2}$ est numerus integer; hoc est, quoties D^2 est aliquota pars numeri 4Q; adeoque (sumptis radicibus) D, vel $\frac{1}{2}N$, aliquota pars numeri 2R: vel (substituendo pro Q, & R, $\frac{s}{r}$; quia scilicet fieri potest ut Q & R sint numeri fracti) $n \sim \frac{s^2}{r^2}$ aliquota pars numeri $\frac{2s}{r}$; hoc est (ductis utrisque in r^2) differentia $n^2 \sim s^2$ aliquota pars dupli rectanguli $2sr$. quoties, inquam, hoc contingit; quadratus quam exhibet expositus canon, est numerus integer; cujus radix $\frac{2sr}{n^2 \sim s^2}$. Hoc autē, ut alias sæpe, ita semper contingit ubi $n^2 \sim s^2$ (differentia facti ex numero dato, in quemvis quadratū ducto, ab alio aliquo quadrato) est vel 1, vel 2. Ut enim 1 dividit quemvis integrumita, & 2 saltem quemvis parem, adeoque & $2rs$. Quæ quidem una regula, summam continet eorum omnium quæ de hoc negotio D. Freniclus tradidit. Est utique numerus in ipsius Tabellæ columna quarta, numerus r, utpote cujus quadratus in

numerum

numerum n ductus ab alio aliquo quadrato, (puta s^2) unitate vel binario differat, sive excessu sive defectu, vel saltem aliquotâ parte numeri $2rs$; Et invenire suum columnæ quartæ numerum; idem est atque invenire nostrum r. (quod interim ille, quo pacto fiat, nusquam docet; adeoque rem totam insolutam relinquit: exempla tantum exhibendo in singulis numeris non quadratis ad usque 150, regulam autem, qua dato quovis numero perficiatur, neutiquam exhibendo, quam exigebat problema.) Quæ autè deinceps decem continuis paginis præcepta traduntur, unde numerum columnæ quartæ reperiatur quæsitus columnæ secundæ numerus: Nos uno hoc præcepto simul & semel tradimus; nempe $\frac{2rs}{m^2 \sim s^2}$ esse numerum quæsitum; cujus scilicet quadratus rem imp eatam efficiat.

Quod autem ille speciatim compendium tradit de numeris pariter paribus, hoc est, per 4 divisibilibus, (ubi numeros quartæ columnæ in auxilium non advocat,) id nos universaliter ostendimus, non tantum de numeris per 4 divisibilibus, sed & per quemvis quadratum.

Quæ quidem omnia, aliaque horsum spectantia, jam fusius antehac exposui, tum in nuperis meis ad D m. V. mense Novembri scriptis, tum in iis quas paulò post (sed priusquam D. Fernicli tractatum videram) scribebam ad D. Vicecomitem Brounker*, quarum etiam exemplar cum his accipies.

*Epist. XVII

Quæ autem jam dicta sunt, non eò dicta velim existimes, ut Clarissimis Nobilissimisque Dominis, Fermatio, et Ferniclo, quicquam derogatum eam, vel eorum extenuatum labores, aut in hisce rebus peritiam. (quos summos viros, uti par est, veneror,) sed ut videas de Anglis etiam tuis non esse cur erubescas. Quid autem hac ex parte præstitimus, vel Honoratissimus Vicecomes, qui potiores hac in re partes sustinet, vel & ego, ipsi succenturiatus, Dom. Væ. dijudicandum permitto. Ut qui sum

Oxoniæ, Decem. 26.
1657.

Dnis. Væ. Observantissimus,

Johannes Wallis.

EPIST. XIX.

D. *Joh. Wallis* ad D. Vicecomitem *Brouncker*.

EN hic habes, vir Illustrissime, de posteriori Inductionis instituendæ methodo * (quam paulo fusius quam antehac fecimus explicandam esse visum est) sensa nostra. Quæ quamvis Tibi breviter antehac indicata, sis ipse satis assecutus (ut cui verbum sat erat;) cum tamen video rem ipsam aliorum item oculis subjiciendam, quibus eadem minus esse possint familiaria, operæ pretium esse judico (præsertim cum & tu idem exigere videaris) explicatius eadem aliquanto aperire.

* *Vide Append.* Epist. *XVII.*

Retento itaque, quod prius exposuimus, exemplo; Nempe, dato numero non-quadrato $n = 13$, qui in quadratum a^2 ducendus, unitate deficiat à quadrato; quadratum illud a^2 invenire. Quoniam ex hypothesi $13a^2 + 1$ est numerus quadratus integer, (jamdiu enim est quod problema fuerit de Integris expositum;) certum est quadratum illum minorem esse debere quam $\square 4a^2$, $= 16a^2$; majorem tamen quam $\square 3a$; $= 9a^2$. (quippe posito a numero integro, certum est $16a^2 > 13a^2 + 1 > 9a^2$.) Esto itaq; vel $\square : 3a + b$: vel $\square ; 4a - b$: (ut sit b differentia radicis quarati quæsiti, à radice quadrati vel majoris vel minoris;) Quorũ cum utrumvis pro arbitrio poni possit, posuimus priorem; adeoq; $13a^2 + 1 = \square : 3a + b; = 9a^2 + 6ab + b^2$; &(ablatis utrinque æqualibus) $4a^2 + 1 = 6ab + b^2$.

His positis; manifestum porro est, quantitatem b minorem esse quam a, majorem vero quam $\frac{1}{2}a$. (hoc est $2b > a > b$.) Si enim esset $b = a$, fuisset $3a + b = 4a$, quem numerum esse justo majorem jam ostensum est; est itaque b minor quam a. Sin esset $b = \frac{1}{2}a$, adeoque $a = 2b$; esset (propter æquationem $4a^2 + 1 = 6ab + b^2$ modo expositam) $16b^2 + 1 = 12b^2 + b^2 = 13b^2$ quod esse nullo modo potest. Est itaque b major quam $\frac{1}{2}a$, Adeoque $2b > a > b$.

Eodem modo; cum sit $2b > a > b$; liberum erit statuere vel $a = 2b - c$, vel $a = b + c$, (ut sit c differentia numeri a, vel a $2b$ vel a b;) quorũ cum utrumvis pro arbitrio poni possit, posuimus $a = b + c$, adeoque (propter æquationem $4a^2 + 1 = 6ab + b^2$

modo expositam) erit $4b^2+8bc+4c^2+1 = 6bb+6bc+bb$, & (expunctis æqualibus) $2bc+4c^2+1=3b^2$. Unde colligitur (ut prius) $2c \trianglerighteq b \trianglerighteq c$. Atque hinc porro (posito $b=c+d$) sequitur $2d \trianglerighteq c \trianglerighteq d$; & (posito $c=d+e$) erit $2e \trianglerighteq d \trianglerighteq e$; (prout in operationis exemplo prius exhibito videre est.) Unde cum (posito $d=e+f$) prodeat $e^2+1=6ef+4f^2$; certum est & $7f \trianglerighteq e \trianglerighteq 6f$. Si enim e æquet $7f$, etiam $40f^2$ ($=6ef+4f^2$) æquaret $49f^2+1$ ($=e^2+1$:) *deficit autem*; sin $e=6f$, etiam $40f^2$ ($=6ef+4f^2$) æquaret $36f^2+1$ ($=e^2+1$) atqui *superat*: Major itaque est e quam $6f$, et minor quam $7f$. Et similiter in aliis.

Nequis tamen existimet multis opus esse tentaminibus, ut istiusmodi limites detegantur, puta $7f$ & $6f$, intra quos constabit numerus e; adeoque tædium inde oboriturum submetuat: ut eo metu liberetur, notandum erit eorum alterum fere semper obtineri divisо numero qui rectangulo præfigitur, per numerum præfixum quadrato cujus limites quæruntur. Ut in præsenti exemplo ($e^2+1=6ef+4f^2$) diviso 6 per 1, habetur quotiens 6; adeoque $6f$ est limitum alter; (vel saltem numerus ipsi quam proximus.) Et facto tentamine, ponendo $6f$ pro e, adeoq; $36f^2$ pro $6ef$; erit $6ef+4f^2=40f^2$, qui numerus cum sit major quam $36f^2+1$ ($=e^2+1$,) patet $\frac{1}{6}e$ majorem esse quam f, sive $e \trianglerighteq 6f$: quod autem sit $e \trianglelefteq 7f$ similiter patet, quia posito $e=7f$, erit $6ef+4f^2=46f^2$, minor quam $49f^2+1=e^2+1$. Unde limites innotescunt $7f \trianglerighteq e \trianglerighteq 6f$. Et sic alibi.

Jam vero cum manifestum sit, differentias b, c, d, &c. tum numeros integros esse, tum & continue decrescere: eo tandem perveniri necesse erit, ut subsequens aliqua differentia (saltem ubi ad 1 perveniatur) sit proxime præcedentis aliquota pars; (similiter atque obvenire notum est, in abbreviandis fractionibus, sive maximo communi divisore inveniendo, vi prop. 2. e. 7 Euclidis; divisores per residuos continue dividendo: quæ quidem inquisitio est huic admodum affinis.) Quod ubi contingit, pro limitibus ad instar $7f \trianglerighteq e \trianglerighteq 6f$, habebitur æqualitas. Sic, in præsenti exemplo, cum perventum est ad $4hj+3j^2+1=3h^2$; sumpto $h=2j$, (majorem enim fore quam $1j$, patet ex æquatione præcedente erit ($4hj+3j^2+1=8j^2+3j^2+1=$) $11j^2+1=$($3h^2=$) $12j^2$; quod cum fieri posse constet, posito $j=1$; patet inde

valor

valor numeri j. Unde retrocedendo invenientur valores differentiarum h, g, f, e, d, c, b, & tandem ipsius $a = 180$, quæ radix est quadrati primitus quæsiti.

Atque hæc quidem ad processûs formam satis explicandam sufficiant.

Facile autem hinc est colligere Theorematis veritatem *Dato quovis numero non-quadrato*; nempe dari *aliquem quadratum* qui in eum ductus adscita unitate æquetur quadrato; adeoq; & *infinitos*, uti jam pridem demonstravimus *: Et quidem non modo *adscita unitate* (quod proponit Fermatius) sed & *adscito quovis numero quadrato*, (quod & jam antehac à nobis alias ostensum est.) Nam, verbi gratia, uti posito $13a^2+1$ æquali quadrato, provenit $11j^2+1=12j^2$ adeoque $j^2=1$: sic si à principio positum fuisset $13a^2+9$, proveniset $11j^2+9=12j^2$, adeoque $j^2=9$; (unde colligetur a^2 retrocedendo, ut prius;) & similiter quicunque alius quadratus loco 1, vel 9, adscisceretur. * Vid. Epist. XVI.

At vero, *adscito numero quovis*, puta *non quadrato*, non erit universaliter verum. (Quod & jam pridem diximus, atque ostensu facile est.) quo autem casu res est possibilis, eodem plane modo innotescet; substituendo nempe pro 1, numerum illum quemcunque possibilem.

Sed & porro notandum erit, eodem plane modo procedendum esse, si pro *adscito quovis numero*, dicatur, *dempto quovis numero* (intellige *possibili*.) Nempe pro $+1$, substituendo -1 (& similiter de quovis alio numero possibili.) Quod oppido notandum est ob ea quæ post tradentur.

Atque hactenus quidem satis aperuisse videamur quæ ad hoc negotium necessario spectent. Lubet tamen alia quædam adjicere quæ ad expeditionem faciunt.

Primò itaque, cum jam supra dictum sit, indifferenter pro arbitrio poni posse à principio, vel $13a^2+1=Q: 4c-b:=16a^2-8ab+b^2$; vel $13a^2+1=Q; 3a+b:=9a^2+6ab+b^2$: Quanquam illud omnino verum sit, expedit tamen eam positionem eligere quæ habeat b minorem. Adeoque in præsenti exemplo, quoniam certum est $13a^2+1$ propius accedere ad $16a^2$ quam ad $9a^2$, (quippe illic differentia est $4a^2+1$ hic autem $3a^2-1$,) commodius ponetur $13a^2+1=16a^2-6ab+b^2$.

$n = 13.$

$13a^2 + 1 = 16a^2 - 8ab + b^2$

$8ab - b^2 = 3a^2 - 1$

$3b > a > 2b$

$a = 2b + c$

$16b^2 + 8bc - b^2 = 12b^2 + 12bc + 3c^2 - 1$

$3b^2 + 1 = 4bc + 3c^2$

$2c > b > c$

$b = 2c - d$

$12c^2 - 12cd + 3d^2 + 1 = 8c^2 - 4cd + 3c^2$

$c^2 + 1 = 8cd - 3d^2$

$8d > c > 7d$

$c = 8d - e$

$64d^2 - 16de + e^2 + 1 = 64d^2 - 8de - 3d^2$

$3d^2 + 1 = 8de - e^2$

$3e > d > 2e$

$d = 2e + f$

$12e^2 + 12ef + 3f^2 + 1 = 16e^2 + 8ef - e^2$

$4ef + 3f^2 = 3e^2 - 1$

$e = 2f$

$f = 1$

Ergo $e = 2$

$d = 5$

$c = 38$

$b = 71$

$a = 180$

Similiter, cum postea dictum est, eo quod posito $13a^2 + 1 = 9a^2 + 6ab + b^2$, reperiatur a major quam b at minor quam $2b$, indifferenter poni posse, vel $a = 2b - c$, vel $a = b + c$; quanquam & illud omnino verum sit, expedit tamen eam eligere positionem qua differentia c minor evadat. Adeoq; quoniam hic patet a propius accedere ad b quam ad $2b$, commodius ponetur $a = b + c$ quam $a = 2b - c$. Quod & de reliquis item differentiis d, e, f, &c. pariter intelligendum erit.

Ratio est utrobiq; eadem; quippe cum id agatur ut differentiæ b, c, d, &c, continue decrescentes, tandem ad unitatem reducantur; id citius fiet sumptis ubique minoribus quam majoribus differentiis. (Quod quidem pariter obtineret in abbreviandis fractionibus, sive inveniendo maximo communi divisore, notâ methodo. quod satis quidem obvium erit advertenti, quamquam nesciam numquis illud soleat observare.)

Re sic institutâ, calculi compendium non contemnendum hinc haberi posse, exemplo adjecto patet: Ubi eodē quo prius numero $n = 13$ exposito, calculus tertiâ parte brevior est, quam supra, ubi

ubi differentiæ ſemper exceſſivæ ſumerentur. Quippe illic ad j, hic nonniſi ad f, continuatur calculus.

Ut autem videatur hanc methodum uſui eſſe, non modo ad minores vel mediocres tantum numeros, ſed & ad vaſtos ſatis exquirendos; id ipſum libuit experiri expoſito numero non-quadrato $n = 109$; (qui ex omnibus quos habet D. Frenicle, maximum quadratum poſtulat, quemque nec invenit ipſe, ſed à D. Fermat, ſibi tranſmiſſum fatetur:) Nempe ad hanc formam,

$$n = 109$$
$$109a^2 + 1 = 100a^2 + 20ab + b^2$$
$$9a^2 + 1 = 20ab + b^2$$
$$3b > a > 2b$$
$$a = 2b + c$$
$$36b^2 + 36bc + 9c^2 + 1 = 40b^2 + 20bc + b^2$$
$$16bc + 9c^2 = 5b^2 - 1$$
$$4c > b > 3c$$
$$b = 4c - d$$
$$64c^2 - 16cd + 9c^2 = 80c^2 - 40cd + 5d^2 - 1$$
$$24cd - 5d^2 = 7c^2 - 1$$
$$4d > c > 3d$$
$$c = 3d + e$$
$$\&c.$$

Unde colligitur, $y = 1$

$x = 2y = 2$

$v = 4x + y = 9$

$t = 3v - x = 25$

$s = 5t + v = 134$

$r = 7s - t = 913$

$q = 7r + s = 6525$

$p = 5q - r = 31712$

$o = 3p + q = 101661$

$n = 4o - p = 374932$

$m = 2n + o = 851525$

$l = 20m + n = 17405432$

$k = 2l + m = 35662389$

$i = 4k + l = 160054988$

$b =$

$h = 3j - k = 444502575$
$g = 5h + j = 2382567863$
$f = 7g - h = 16233472466$
$e = 7f + g = 116016875125$
$d = 5e - f = 563850903159$
$c = 3d + e = 180756958460 2$
$b = 4c - d = 66664274352 49$
$a = 2b + c = 151404244551 00.$

Videmus itaque numerum a, radicem quadrati quæsiti, notis saltem 14 scriptum, adeoque & quadratum ipsum notis saltem 27 scribendum, (numerum satis vastum,) positionibus nonnisi 22 investigatum. Quam investigationem satis pro rei natura compendiosam esse vix erit qui diffitebitur.

Verum aliud adhuc supereſt compendium, quo non raro etiam hujus laboris pars saltem dimidia abscinditur. Ope scilicet regulæ jamdudum traditæ; nempe, *si differentia numeri expositi, in quadratum aliquem ducti, ab alio quovis quadrato, sit aliquota pars dupli rectanguli sub quadratorum illorum radicibus; quotiens divisione emergens, erit radix quadrati quæsiti.* Quod cum contingere necesse sit, quoties ea differentia est vel 1, vel 2; si quando reperiatur quadratus qui in datum non-quadratum ductus, vel alium quadratum unitate aut binario superet, vel etiam binario deficiet, exinde colligi quadratum quæsitum certum est. Hoc autem inter operandum, præsertim in longioribus numeris, ubi compendio maxime opus est, sæpissime occurret.

Exempli gratia, exposito (ut modo) $n = 13$. quia posito $13a^2 + 1 = 16a^2 - 8ab + b^2$, habetur æquatio, $3b^2 + 1 = 4bc + 3c^2$, adeoque $2c > b > c$; si ab initio positum fuisset $13a^2 - 1$, prodiisset $3b^2 - 1 = 4bc + 3c^2$, adeoque $2c = b$; unde erit $c = 1$. $b = 2$. $a = 5$. cujus quadratus in 13 ductus unitate *superabit* quadratum numeri 18, adeoque 180 ($= 2 \times 5 \times 18$) est verus numerus a quæsitus, cuius nempe quadratus in 13 ductus, unitate minor erit quadrato numeri 649.

Eodem modo; expositio $n = 109$, ubi operando ut supra (posito $109a^2 + 1 = 100a^2 + 20ab + b^2$) perveniatur ad $16kl + 5l^2 = 9k^2 - 1$, adeoque $3l > k > 2l$, manifestum si ab initio poneretur $109a^2 - 1$, proditurum fuisse $16kl + 5l^2 = 9k^2 + 1$,

adeoque

adeoque $k=2l$, unde habetur $l=1$, & (retrocederdo) $a=581525$, cujus nempe quadratus in 13 ductus unitate *superet* quadratum, unde tandem, dicto modo, colligetur quæsitus $a=1514042445100$ cujus quadratus in 13 ductus unitate a quadrato *deficiet*. Adeoq; qui ady prius processerat calculus poterit ad l terminari.

Sic expositio numero non-quadrato 433; posito $433a^2+1=441a^2-42ab+b^2$, operatione ut præscribitur peractâ prodibit æquatio $80^2+1=38Op+9p^2$ adeoque $5p\geq O\geq 4p$; Ergo, si posuissem ab *initio* $433a^2-1$, prodiisset $8\theta^2-1=38op+9p^2$, adeoq; $5p=O$. & propterea $p=1, O=5$. &c unde prodiret $a=347483377$, cujus nempe quadratus 120744697291324129 in 433 ductus exhiberet 52282453927143347857, qui unitate *superat* quadratum numeri 7230660684. Adeoq; 5025068784834899736 (duplum rectanguli sub radicibus 347483377 & 7230660684) est numerus a primitus quæsitus: nempe cujus quadratus 25251316292322095858983939617172869696 in 433 ductus, exhibebit 10933819954575467506940045854235852578368, qui unitate deficit a quadrato numeri 10456490785428669571 3. Quæsitus itaque quadratus locorum saltem 38, (numerus satis ingens,) posit 15 positiones detegitur, operatione scilicet non nisi ad p continuato.

$p=1$	
$5p=o=5$	
$4o+p=n=21$	
$2n+o=m=47$	
$3n+n=l=162$	
$4l-m=k=601$	
$13k+l=j=7775$	
$2j+k=b=16551$	
$3b-j=g=41678$	
$14g-b=f=566941$	
$4f+g=e=2309442$	
$3e-f=d=6361385$	
$2d+e=c=15032212$	
$4c+d=b=66490233$	
$5b+c=a=347483377.$	

Atque hic quidem fixissem pedem; nisi quod unum adhuc aut alterum, mantissæ loco, notandum restet; non quidem tanquam huic negotio necessarium, sed notatu forsan non injucundum.

Et primo quidem, quanquam (ut modo dictum est) compendium jam proxime traditum de inveniendo a, sive a succenturiato, (cujus nempe quadratus in n ductus, unitate quadratum superet,) ejusque ope, a vero, (cujus quadratus in n ductus, unitate

tate a quadrato deficiat,) omnino verum fit, uſuiq; accommodum: ſi tamen illud placeat negligere, adeoq; opus inceptum eouſq; continuare donec prodeat a verum; id facile obtinebitur (ſine operoſo calculo) propter easdem eodem ordine recurrentes æquationes. Exempli gratia. In numero pridem expoſito $n=109$ ubi inventis æquationibus quæ conveniunt ipſis $a, b, c, d,$ &c. uſq; ad m, (ubi habetur $851525 = a$, ſive a ſuccedaneſi,) eædē ipſæ æquationes occurrunt pro $m, n, o, p,$ &c. quæ prius pro $a, b, c, d,$ &c; (ſi ſaltem excipias x&y duas ultimas in quibus ſiſtetur; quas ipſas etiam, niſi illic ſiſtere placuerit, æquationes, ipſis k & l conformes eſſe oportebit.) Poterit itaq; calculus, a principio inſtitutus, ad eas æquationes inveniendas, ſtatim ſiſtere, quum primum ad ipſum l vel m, (unde ſcilicet a, ſive a ſuccenturiatum, colligitur,) perveniatur. Et qui hoc auxilium placuerit adhibere, poterit ille ſine magno diſpendio etiam compendium jam proxime traditum negligere.

Alterum, quod item notatum velim, hoc eſt; Nempe, uti hactenus tradidimus formam inveſtigandi quadrati primi radicem cujus ope quadratorum deinceps omnium in infinitum radices, juxta ſeriem jamdudum traditam, facillimo negotio exhibeantur: Si tamen & ſeriem illam negligere placuerit, poterunt & reliquorum illorum quadratorum radices eadem arte (ſed longiori parum opere) obtineri, qua & illa prima, continuato ſcilicet opere inchoato donec ad quadrati ſecundi, tertii, quarti, &c. radicem perveniatur. Sic, verbi gratia, Expoſito ut ſupra, $n=13$. Ubi perveniatur ad æquationem hanc, $4cf+3f^2 = 3e^2-1$, collegimus ſuperius, poni poſſe $e=2f$; nempe ſi ponatur $f=1$; (unde & retrocedendo reliquorum valores inveſtigavimus, adeoq; & ipſius a, quæ radix eſt quadrati primi.) At vero ſi ponamus $f>1$, erit $e>2f$; adeoq; poſito $e=2f+g$, procedendum erit donec ſimilis recurret iterum æquatio; quod fiet ubi ad l, m, perveni-

$N=13$ $s=1$ $r=2$

$q=2r+s=5.\alpha$

$p=8q-r=38$

$o=2p-q=71$

$n=2O+p=180.A$

$m=8n-o=1369$

$l=2m-n=2558$

$k=2l+m=6485.\beta$

$j=8k-l=49322$

$h=2j-k=92159$

$g=2h-j=233640.B$

tur

itur; nempe $4lm + 3m^2 = 31^2$ — 1, ubi posito $m = 1$, erit $l = 2m = 2$ unde (retrocedendo) habebitur $a = 233640$ radix quadrati secundi. Sin adhuc ponamus, non $m = 1$, sed $m > 1$, erit $l > 2m$; adeoq; posito $l = 2m + n$ procedendum erit, donec recurrat similis æquatio, puta $4rs + 3s^2 = 31^2 - 1$; unde, posito $s = 1$, erit $r = 2$, & $a = 303264540$. Sin ponamus $s > 1$, procedendum ut prius, ad radicem quarti, & deinceps quinti, &c. ad libitum.

$f = 8g - b = 1776961$
$e = 2f - g = 3320282$
$d = 2e + f = 8417525.\gamma$
$c = 8d - e = 64019918$
$b = 2c - d = 119622311$
$a = 2b + c = 303264540.C$
&c &c.

Verum & hic, ut prius, ubi ad a primum perveniatur, levabitur calculus ob æquationes similes subinde recurrentes. Uti in apposito exemplo liquet; ubi habentur tum omnes a veri (quos jam appello A, B, C, &c) tum & omnes α sive a succedanei, (quos notis α, β, γ, &c designo) puta, quorum quadrati in datum non quadratum ducti, unitate vel a quadrato deficiunt, vel quadratum superant. Si enim, verbi gratia, ubi jam est $s = 1$; ponatur $f = 1$; ubi nunc est n, habebitur a radix prima. Sin loco $s = 1$ ponatur $m = 1$; ubi nunc erit est g, habebitur $a = B$ radix $a =$ quadrati secundi. Uti jam habetur $a = C$ radix quadrati tertij. Et quidem, continuata similium æquationum repetitione, habebimus D, E, F, &c. quousque libet. quod &, mutatis mutandis de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. intelligendum erit.

Ubi interim advertere licet; sicut ex cognito α, per regulam superius traditam, prodibit A; (quia scilicet $13 \times 5 \times 5$, $- 18 \times 18$, $= 1$, adeoq; $2 \times 5 \times 18 = 180 = A$;) sic ex cognito A, prodibit B; ex β, C; ex B, D; ex γ. E; ex C, F. &c. Atq; huic simile sæpissime continget, cum levi tamen non nunquam discrimine. Exempli gratia. Exposito non quadrato 21; adeoq; $21a^2 + 1 = 25a^2 - 10ab + b^2$. vel $= 16a^2 + 8ab + b^2$; prodibunt illic numeri, 1, 2, 5, 12, vel etiam 1, 2, 3, 5, 12; hic vero 1, 2, 7, 12, vel 1, 2, 5, 7, 12, vel etiam 1, 2, 3, 5, 7, 12; (prout aliis aliisq; modis differentias additivas vel ablativas vel mistim sumamus;) prodibit autem utcumq; $a = 12$ radix prima; reliquæq; deinceps opere continuato innotescent ut prius. Ubi notandum erit non modo numerorum A, B, C, &c, quadratos, in datum 21 ductos unitate

a quadrato deficere; sed & numerorum α, β, ζ, &c. quadratos sic ductos, quadratum superare, non quidem unitate, sed aliquota saltem parte dupli rectanguli sub duorum quadratorum radicibus; unde innotescet, ut supra, quadrati alicujus quæsiti radix Verbi gratia, $na^2 = 21 \times 2 \times 2 = 84 = 81 + 3 = 9 \times 9 + 3$. Ergo $3\ (2 \times 2 \times 9)\ 12 = A$ radix quæsita. Et sic de reliquis. Nempe ex cognito α, cognoscetur A; atque ex A, B; & ex β, C; ex B, D; ex ζ, E. &c. Nec multum absimiliter in aliis numeris continget. Quanquam & nonnunquam soli prodibunt A, B, C, &c. Sed his diutius immorandum non est.

$N = 21.$

$d = 1,$

$c = 2d = 2, \alpha$

$b = 2c + d = 5$

$a = 2b + c = 12. A$

$e = 10a - b = 115$

$f = 2e - a = 218. \beta$

$g = 2f + e = 551$

$h = 2g + f = 1320. B$

$i = 10h - g = 12649$

$k = 2i - h = 23978. \zeta$

$l = 2k + i = 60605$

$m = 2l + k = 145188. C$

&c &c.

Atq; hæc sunt Insignissime Domine, quæ ad hanc etiam Problematis Fermatiani solutionem explicandã dicenda videbantur.

Habet itaq; Nobilissimus Fermatius (ut huic tandem negotio finem imponam) Problema suum, tum multiplici methodo, tum & adeo feliciter solutum, ut vix credam, non dicam, D. Freniclum, (qui quid in hac re præstiterit jam palam fecit,) sed Fermatium ipsum (nequid altius dicam) accuratius fuisse absoluturum. Nec esse credo cur vel hic vel ille, sive de nobis, Dominatione saltem vestra, sive de gente nostra Triumphum agat. Id saltem superest, ut Dominationi Vestræ gratulemur, qui a Nobiliss. Fermatio ad Hastiludium (*coups de lances*) literarum, in arenam vocatus, priscam Anglorum gloriam quam adversus Gallos olim obtinuerunt, etiamnum retines illibatam; Nec Arte, minus quam Marte, Anglorum Heroas pollere indicaveris. Et quidem cum Vir Nobilissimus, utut hac sibi suisq; tam peculiaria putaverit, & aliis impervia, (quippe *non omnis fert omnia tellus*) ut ab Anglis haud speraverit solutionem; profiteatur tamen *qu'il* sera pourtant ravi

d'estre

l'estre destrompe par cet ingenieux & sçavant Sigeur; erit cur & ipse tibi gratuletur. Me quod attinet, humillimas est quod rependam gratias, quod in Victoriæ tuæ partem advocare dignatus es,

Insignissime Domine,

Oxonij, Jan 20. 1657. stylo Angliæ

Humillimum tuum, Tibiq, obsequentissimum servum,

Johannem Wallis.

EPISTOLA XX

D. Vice-Comitis Brouncker *ad D.* Joh. Wallis.

Sir

I received yesterday a *Letter* from Sr *Kenelm Digby*, with these inclosed. In mine was only compliments, and a reference to these. I am not displeased to see, that at last the desire Mons. *Frenicle* evidently hath to oppose us in all he can, produceth onely such triviall objections as are to be found in in these contained. * Only I am sorry his passion should mislead him into such unevill expressions. His Arguments are so inconsiderable, that they hardly deserve any reply: His cavil at your solution by the number 1, is very weake. For that 1 is not a number in the opinion of some, every one knows; but they all doe know as well, that it is a number in the opinion of others. And that both Mr. *Fermat* (who proposed the *Probleme*) and Mr. *Frenicle* (who now makes this objection) have taken it for such, is evident from their papers. That it was such a solution as the Proposer expected, none can suppose; nor was it given as such; but rather to shew how easily it might be solved as it was worded; & that it ought to have been otherwise expressed, or that exception made. His cavil at mine, proceeds from his not minding the sense thereof, which you did so fully expresse, that otherwise he could have no ground for what he objects, the aliquote parts being restrained to the actuall parts Ep.XXII,

and no others. That 1 doth not in every respect agree with the instance 343, is very true, (nor was that required in the probleme:) But it is as true, that none of his solutions do so too: For, as the Cube 1 hath no aliquote parts, so are none of his, numbers prime Cubes; as is the instance given 343, the cube of 7 a prime number. Severall of my friends, in whose company I now am, will not permit me to say more, but that I am,

Sir,

Febr. 18. 165$\frac{3}{4}$. *Your most faithfull friend & servant*

BROUNCKER.

EPISTOLA XXI.

D. Kenelmi Digby *ad D.* Joh. Wallis. *præcedenti inclusa, una cum subsequente.*

Worthy Sir,

I may seeme to be one of those debtors that are runne so farre in arreare as they can never hope to satisfie their Creditors, nor have confidence to appeare before them. For it is now neere 4 Months since I received your most obliging letter of the 4 of *Septemb.* last, *stilo vet.* I could make you an excuse, (and a true one,) that much of this time I have been out of towne, and so cast my silence upon that cause. But that were not a justifiable excuse: for, no tumult of removing, nor trouble of journeying, ought to be allowed, for a sufficient cause to retard the 20. part of this time my humble, and due acknowledging your excessive favour and unlimited civilities in this Noble and generous letter of yours. My wisest course then, as well as the most candid is to have recourse unto plain and down-right truth: which will never faile of bearing out her friend, as long as his intentions are sincere and respectfull, this

This plea ſhe maketh unto you in my behalfe. Your obliging expreſſions in your letter were ſo beyond all proportion or poſſibilitie of merit in me, that I judged bare and dry thanks, too meane a returne for ſo high a favour. I was deſirous to draw in an other into the account with me, that might offer ſomething to you ſo acceptable as might make my letter the welcomer that ſhould uſher it in. And accordingly I ſent unto Mounſ. *Fermat* your ingenious and noble Theorme about the ſegment of a Pyramid or Cone; entreating him to ſend me the demonſtration of it, that I might tranſmit it to you. And thereuppon, till I ſhould have his anſwer, I deferred writing to you; for I expected he would ſend it me within a returne or two of the poſt. But ever ſince, from time to time, I have had nothing from him but excuſes, and ſtill remitting me to the next, and the next. It is true it came to him upon the nicke of his removing his ſeate of judicature from Caſtres to Tholoſe; where he is ſupreme judge in the ſoveraigne Court of Parliament. And ſince that, he hath been taken up with ſome Capitall cauſes of great importance; in which in the end he hath given a famous and much applauded ſentence for the burning of a Prieſt that had abuſed his function; which is but newly finiſhed; and execution done accordingly. But this which might be an excuſe to many other, is none to Mounſ. *Fermat*, who is incredibly quicke and ſmart in any thing he taketh in hand. Therefore his not giving the demonſtration of your Theorme all this while, (nor any other anſwere, but much commending and applauding it, every time I have written to him about it) is an evidence now at the laſt, that I muſt expect none from him: And therefore muſt not hope to have my thirſt ſatisfied in this particular by any other then by your worthy ſelfe: for which end, when I ſhall have the happineſſe of waiting upon you at Oxford, I will humbly beg the demonſtration of you. And certainly, as ſoone as *I* ſhall returne into England (which *I* hope will not be long firſt) one of the firſt journeys *I* intend to make, ſhall be to that famous dwelling of the Muſes and profoundeſt ſciences, that *I* may there witneſſe to you in preſence the great value and deep reſpect *I* have for you; and receive then alſo the favour

of

of being introduced by you to salute your worthy Noble Colleagues and friends Dr. *Wilkins* and Dr. *Ward*; whom *I* exceedingly honour.

As *I* was thus in despaire of receiving what *I* hoped from Mr. *Fermat*; & therfore resolved to break my silence and humbly crave your pardon for it, upon telling you the true cause of it: *I* receive a new favour from you, by your most obliging letter of the 21 of November last, which hath had a very slow passage to me: occasioned (as *I* understand) first, by my Lord *Brounckers* absence from London; and then, by Mr. *Whites*; for it arrived hither but by the last Post. Mr. *Frenicle* was at dinner with me when it was brought me: after which some necessary businesse called me presently abroad for some houres: during which (after having cursorily runne it over by my selfe) *I* left it with him to peruse. When *I* returned home, *I* found he had hastily written in my Chamber (where *I* left him) some reflections upon the first part of your letter, in forme of one to me, reserving to send or bring me his considerations upon the latter part of it, that day sevennight: for he was to goe out of towne the next morning for 4 or 5 dayes. *I* have long debated with my selfe whether *I* should send it you or no: he expressing therein so different a sense from yours. Yet in the end two reasons have convinced me that it is best to send it you: The one, because he desiring me earnestly to do so, if I should not; and you thereby not knowing what to reply to him, he might misjudge your silence to him and please himselfe with the beleife of an advantage, that I doubt not but you will soon perswade him the contrary of. The other is, that the variety of semiments between great and learned men, is no small promotion of learning, by giving occasion to display deep and abstruse verities. I therfore caused my secretary to coppy out his letter to me (for, it was so hastily scribled in a French hand, that you would never have bin able to read it) and here enclosed *I* send it you: as also I will do his next, as soone as *I* receive it from him.

After so long importuning you at this time, I were too blame, if *I* further prolonged your trouble, by making an apology to you for doing so. The best amends I can now make, is not to

to perſiſt in doing amiſſe. I here then cut of the thread, by ſigning my ſelfe, as I truly am

Noble and worthy Sir,

Paris, 6 Febr. 1658. St. Nov.

Your moſt humble and moſt affectionate ſervant and honorer

KENELME DIGBY.

EPISTOLA XXII.

D. de Fernicle, *ad D.* Kenelmum Digby, *præcedenti inclusa.*

Mirandum ſane mihi videtur, vir Illuſtriſſime, quonam pacto Mathematici alioquin Mathematici, tantū hallucinati ſint in reſpōſione ad duo problemata numerica Clariſſimi viri D. Fermat, circa cubos & quadratos omnibus ſuis partibus aliquotis addendo, ut unitatem inde & tertio producere ad illa ſolvenda non dubitarint, ut videre eſt in Epiſtola clariſſimi Wallisii Oxonii data 21 Novembris quam mihi ex tua benignitate perluſtrandam tradidiſti. Quis enim vel vulgaris Arithmeticus, aut potius ex novitiis tironibus hanc ſolutionem tradere non erubeſceret? Quamvis etiam unitas quæſtionem perfecte ſolveret, cum hæc omnes numerorum gradus & figuras in ſe contineat, ita ut quanquam non ſit numerus, omnes tamen numeros, quodammodo referat; ſed ne ipſa quidem unitas, his quæ requiruntur ſatisfacere valet. Hæc ſunt Problemata.

1. Invenire cubum qui additus omnibus ſuis partibus, aliquotis conficiat quadratum. Exempli gratia numerus 343. eſt cubus à latere 7. omnes ipſius partes aliquotæ ſunt 1, 7. 49. quæ adjunctæ 343. conficiunt numerum 400. qui eſt quadratus à latere 20. Quæritur alius cubus numerus ejuſdem naturæ.

2. Quæritur etiam numerus quadratus qui additus omnibus ſuis partibus aliquotis conficiat cubum.

Quæritur

Quæritur igitur numerus, qui habeat partes aliquotas; ſed cum numerus ſit multitudo unitatum, ipſa unitas non erit numerus; igitur unitas non ſolvit quæſtionem, quia quæritur numerus; & non quivis numerus, ſed qui habeat partes aliquotas quæ ipſi jungi poſſint, & ſit ejuſdem naturæ ac numerus propoſitus 343. cujus partes enumerantur. quæ autem ſunt partes unitatis? certe ſi nullas habet ut ipſemet Wallifius fatetur, neutiquam ipſa erit ejuſdem naturæ ac 343. numerus ſcilicet cubus qui habeat partes aliquotas, quæ junctæ ipſi numero faciant quadratum.

Si vero ad fractos tranſire in partibus numerorum eſt animus; unitas & quivis numerus infinitas habet partes (ſi fractiones pro partibus ſumantur) quæ ideo addi non poſſunt. Tam longe igitur abeſt à propoſito ut ſtupore, & rubore afficiar tantum virum huic reſponſo quaſi ſolutioni non ſolum acquieſcere, ſed etiam laudare & approbare; atque inſuper quod aſſeverare auſus ſit, hanc quam vocat ſolutionem quæſitis accuratiſſime reſpondere.

Jam ad aliam ſolutionem à Nobiliſſimo viro D. Brouncker per numeros fractos accedamus, & perſcrutemur an hæc ſolutio ſit admittenda.

Superius enunciatum eſt, quod ſi fractionibus locus detur in partibus, cuivis numero, ſive ille ſit integer, ſive ſit fractus, infinitas partes poſſe aſſignari; & ideo nulla poterit eſſe partium additio, ſi enim verbi gratia pro cubo detur $\frac{343}{64}$ quidni cum expoſitis partibus $\frac{1}{64}$ $\frac{7}{64}$ $\frac{42}{64}$ etiam $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{8}$, &c. vel $\frac{7}{8}$ $\frac{7}{16}$ $\frac{7}{8}$, &c. vel $\frac{343}{128}$ inter ipſas computabuntur? nequaquam enim, ut hæ ſint partes, opus eſt eandem ipſis denominationem permanere. Sed poſitis hiſce partibus nimirum $\frac{1}{64}$ $\frac{7}{64}$ $\frac{42}{64}$ neceſſario inde aliæ partes exurgent, & erunt ipſi numero $\frac{343}{64}$ partes $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{49}$ $\frac{1}{343}$, quæ quidem ſimul junctæ & cum ſuo numero non facient quadratum.

Quanquam autem nullæ aliæ eſſent partes legitimæ ipſi $\frac{343}{64}$ quam ſupratraditæ, quæ idem nomen retinent; quis non videt hunc numerum eundem eſſe; ac ipſum 343. à D. Fermat datum cum aliquantula immutatione, & omnino ab ipſo derivatum? Si dato triangulo rectangulo 3. 4. 5. aliud tale quæreretur, ſufficeret ne ad legitimam ſolutionem, & qualem virum eruditum decet, ipſius multiplicem 6. 8. 10. exhibere? Cur autem

autem in eisdem numeris fractis etiam numerum quadratum qui junctus suis partibus faciat cubum non exposuerit: certe nulla alia est causa nisi quia D. Fermat talem quadratum pro exemplo ut in cubo non præbuit. Jam vero cum habeat in opusculo Latine conscripto, & tibi Vir Nobilissime dedicato, quadratum quæstioni satisfaciens, facile illi erit applicando quadrato Cubos huic quadrato alios quotquot voluerit eadem via producere.

Sed neque mihi arridet causa cur plures non dederit Cubos: quia, inquit, non plures postulat Fermatius; ut etiam quod sua indagatione problema indignum censeat; & certe hanc postremam ipsius excusationem admittendam esse non contradicerem, si huic quæstioni non invigilasset, & illam neglexisse simulasset: degunt in hac civitate præstantissimi Mathematici, qui etsi nominatim ad eadem problemata solvenda à D. Fermat fuerint provocati, silere tamen maluerunt, quam incongruum quid erogare. (Solus Frenicles eadem aggressus est, & solutione potitus; quisque suo dono peculiari insignitur: hæc ille; alii aliis; libere effatum illud fatendum est, non omnia possumus omnes) hoc vero silentium nihil eorum famæ detrimenti attulit. Sed quia D. Wallisius unitatem repetitis vicibus pro cubo quæsito profert; & ideo cæteros inquirere negligat, quod Fermatius plures non requirat: certe nullus datur huic excusationi locus, cum nullum plane cubum tradiderit, quando unitatem obtulit: facile igitur est illud despicere, ad quod non possumus pervenire. Nec etiam multum convenit Matheseon Professori, conqueri cui bono sint hæc problemata; nobis forsitan qui has disciplinas non profitemur, sed in illis animi tantum gratiâ exercemur hoc dictum condonari posset.

Eodem vero jure quæreretur ab eo, cui bono, cui utilitati in investiganda perperâ circuli quadratura tanto tempore insudarit, veletiam in contexenda sua Infinitorum Arithmetica; nequaquam enim Mechanicis usibus hæc omnia inservire possunt: Sed cui bono tota pene Geometria, & Arithmetica, si paucula quædam, & ea magis trita, & à peritis despecta, quibus Geodetæ, agrimensores, mercatores, & qui utramque Architecturam exercent, aliique complures in suis calculis utuntur, excipias; cætera namque magis recondita, & præstantiora nonnisi ad

ſcientiæ ſubtilitatem, & perfectionem ſpectant.

Cum autem ſit proprium intellectus humani veritatem inquirere; nec aliam ob cauſam tot viri præſtantes ſcientijs acquirendis operam dederint: inutilis certe dici non debet in diſciplinis alicujus acquiſitio veritatis.

Ulterius progrediendo, video ab ipſo propoſitum eſſe problema ſatis elegans: exquirit nempe quadratos numeros qui juncti cunctis partibus ſuis aliquotis conficiant eandem ſummam, uti ſunt 16. & 25. quorum quilibet junctus ſuis partibus facit 31. Sed quia videtur hoc quod illi primum fuit obviam & quaſi fortuito poſtulare, non ſecus ac ſi ipſum D. Fermat ſimiliter egiſſe putaret in ſuis problematibus proponendis; quæro ab ipſo VValliſio an habeat tales quadratos, vel ſaltem an certo ſciat & demonſtrative, ſi tales alii quadrati inter ſe primi, vel ſi nulli præter 16. & 25. in totâ numerorũ multitudine reperiantur; & poſtea reſponſum accipiet; non enim debet ignorare, an quæ proponit ſint impoſsibilia nécne: nec eſt Mathematici, leviter, & abſque matura inſpectione quæ primò ipſi ut occurrunt proponere; niſi forſitan inſtructionis ſuæ gratia, & de eis quæ fruſtra indagaverit, perquirat.

Cæterum ſi haud proſpere ab ipſo actum eſt in his prioribus, reliqua fœliciorem non conſequantur eventum, imo etiam in pejus ruunt, dum pro ſolutione multiplices quoſdam numeros tradit, quod quidem nihil aliud eſt quam numerum in 2. vel 3. vel alium numerum ducere, & in hoc vires ſuas exercuiſſe & ſufficienter probaſſe jactitat, id & alia pleraque abſona mihi facillimum foret palam facere: ſed nunc ſingula ſigillatim diſcutere non vacat; attamen adeo me benevolentia, & beneficiis devinctum tenes, ut nihil laboris ſubterfugere ad tua mandata exequenda, nec deſiderio tuo aliquid denegare poſsim, & me ſemper ad tibi obtemperandum paratiſsimum invenies. Vale.

Pariſiis 3. *Febr.*
1658.

EPIST. XXIII.

D. *Joh. Wallis* ad D. *Kenelmum Digby*

Illustrissime Domine,

Tuas Parisiis Febr. 6. *st. n.* datas, Febr. 19. *st. vet.* decubiturus accepi, quas pridie Londini acceptas ad me transmiserat Honoratissimus Vicecomes *Brouncker*, una cum inclusis D. *Frenicli* ad te, literas: quibus postridie paraveram responsum; sed cujus missionem hactenus distuli, eo quod aliarum septimana sequente mittendarum spem feceras, (quas nondum accepimus,) quibus simul responderi posse putaveram; idq; eo potius quod meæ *Dec.* 26, aliæq; paulo citius a D. Vicecomite *Brouncker* ad Te missæ, nondum (uti videtur) ad te perveniissent cum illæ tuæ scriptæ fuerant. Non possum autem non humillimas ob immensum quo me favore prosequeris immerentem gratias reponere; sed & gratulari nobis & Oxonio nostro, quod spem feceris Te nos mœrentes præsentia tua refocillaturum brevi, qui doctissimum *Langbanium*, & tibi charissimum, jam deflemus, vix reparabile damnum; pleuritidis morbo *Febr.* 9. vivis ereptum. Tantillum temporis est quo *Armachanum*, *Seldenum*, *Langbanium*, tres incomparabiles viros, magno literarum damno ereptos, Anglia deflerit.

Ad inclusas tuis Nobilissimi *Frenicli* literas, hæreo quid dicam. Si enim convitiis agendum sit, tacere malim quam seram reciprocare.

Quod Numerus 1 partes aliquotas non habeat, nec novum est, nec ego id nesciveram.

Quod autem 1, Cubus non sit, quod non sit Numerus; quamquam ab alio forsan id dici posse putassem, non tamen putaverim a *Frenicle* dicendum; qui eundem ipse ut Numerum exhibuerat, & quidem Cubum. Exhibuit utiq; (nisi me fama fallit) ad aliud *Fermatij* problema, 1 & 1728 ut *duos Cubos numeros, duobus aliis numeris Cubis* 1000 & 729 *æquales*. Eundem in libro edito (quem favore tuo me nuper accepisse gratus agnosco) pag. 8. *Numerum* appellat, (*Exponantur*, inquit, *duo Numeri* 1 & 7, de hac ipsa quæstione verba faciens:) & quidem *Quadratum*, pag.

17 (verbis *Fermatij*), in ipſa poſterioris quæſtionis ἐκθέσει,) *Quadratus* 1 *ductus in* 3, *adſcita unitate, facit* 4. Quod & verbis ſuis confirmat *Freniclus*, pag. 21. ſub finem, id ipſum aſſerentibus. Iterumq; pag. 23. *productum*, inquit, *ex* 5 *in quadratum* 1. Sic pag. 25, lin. 19. *Numerus* 7 *in quadratum* 1 *ductus*. Et lin. 23. *minor numerus erit quadratus nempe* 9, *& major erit* 11 *in quadratum* 1 *ductus*. Et paſſim alibi. Cur vero, ſi Quadratum eſſe fateatur, neget & Cubum eſſe; vel etiam, ſi Clariſſimis DD. *Fermatio* & *Freniclo* tum Numerus ſit, tum nunc Quadratus, nunc Cubus, nobis interim non ſit; non video.

Eſto itaq; ſimus, ſive ego, ſive & Honoratiſſimus Vicecomes, non niſi *Vulgares Arithmetici*, vel etiam *ex noviſſimis Tyronibus*; at quid *mirandum* ſit, quid *erubeſcendum*, quid Clariſſ. virum vel *ſtupore afficiat*, aut *rubore*, nos plane non aſſequimur. Propoſitum utiq; fuerat *Invenire Cubum, qui additus omnibus ſuis partibus aliquotis conficiat Quadratum*. Eſt, inquam, 1, Cubus, (Freniclo ſaltem habendus eſt pro Cubo) idemq; additus ſuis partibus aliquotis (quippe nullis) manet adhuc 1; qui & Quadratus eſt. Quæritur item *Quadratus, qui additus omnibus ſuis partibus aliquotis conficiat Cubum*. Eſt, inquam, idem 1, Quadratus, (Fermatio ſaltem & *Freniclo* quadratus erit, quippe quod uterq; ſæpius affirmavit,) idemq; additus omnibus ſuis partibus aliquotis (quippe nullis) manet adhuc 1, qui Cubus eſt. Quid itaq; vereamur non modo *iterum & tertio*, verum item quarto & quinto ſi opus ſit, affirmare; *Unum eundemq; numerum* 1, *utrinq; quæſito ſatisfacere*.

Quid autem Clariſſimo Viro bilem moveret, (ne compellato quidem, nedum laceſſito, & quicum, ubi literas quas carpit ſcripſeram, mihi nihil quicquam interceſſerat negotij; neq; ipſius libellum vel videram quidem aut de eo quicquam inaudiveram, tantum abeſt ut quoquo modo læſerim,) plane neſcio. Non enim ſi alium aliquem numerum expectaverit vel ipſe, vel & *Fermatius*, (quod nullus dubito,) vel etiam ipſe (quod tum neſciveram) alios dederit, igitur & ægre ferrent hunc ipſis ex inſperato oblatum eſſe, quem *Fermatius* proponens vel non prævideret, adeoq; nec præcavebat, vel nec viderat *Freniclus* ſolvens, adeoq; nec detexit; Uti nec prævidit forte *Fermatius* (nec *Freniclus* detexit) quæſtionem tertiã; per numeros fractos ſolvi poſſe; adeoq; ſimpliciter

pliciter *quadratos* petebat, quum tamen vellet nonnisi *quadratos integros*.

Quod de numeri Fracti partibus aliquotis reponit Vir Cl. ad ea quæ nos hypothetice tantum dixeramus (nempe, si Fermatius & in his supponeret partes aliquotas,) num calori affectuum dandum sit, an festinationi potiùs, non determino, at certe vix putaverim Cl. V. sedate rem pensitasse, quum, pro numeri $\frac{343}{64}$ partibus aliquotis, haberi postulat $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, &c, vel etiam $\frac{7}{12}, \frac{7}{14}, \frac{7}{8}$, &c, non minus quam $\frac{1}{64}, \frac{7}{64}, \frac{49}{64}$. Eas enim pro partibus aliquotis, (ne quidem in quantitate continua, nedum discreta,) non reputandas esse, certum est tum per 3 & 4 *dd* 7 *Euclidis*, tum 1 *d* 5, quæ ad (aliquotæ) partis naturam postulant ut *totum metiatur*, (hoc est, ut aliquoties accepta illud æquet,) quod in illis non obtinet. Nam, verbi gratia, numerus $\frac{3}{7}$, sexies sumptus, minor erit numero $\frac{343}{64}$; at septies sumptus, eundem superabit: Non igitur hujus ille *pars* erit, sed *partes*, (ut loqui solet *Euclides*,) hoc est, *aliquota* pars non erit, sed saltem *aliquanta* & de reliquis similiter. Quod autem $\frac{343}{128}$ ejusdem numeri $\frac{343}{64}$ partem item aliquotam esse velit; quamquam illud meliori prætextu dici posset, utpote quod in quantitate continua admittendum erit, eadem ratione qua $\frac{1}{2}$ habebitur aliquota pars numeri 1, vel $\frac{1}{2}$ numeri 3: attamen in quantitate discreta non erit admittendum. Uti enim 343 sive $\frac{343}{1}$, qui Unitates numerat, supponit igitur Unitates illas actu discretas, non autem & unitatum semisses aliasve particulas: Sic & $\frac{343}{64}$, qui numerat sexagesimas-quartas, supponit quidem has sexagesimas-quartas (quippe res numeratas) actu discretas esse, & numerabiles; non autem & centesimas-vicesimas-octavas, quas quidem potentialiter inesse dicas & mensurabiles, (sicut unitatibus insunt semisses,) non actu discretas.

Cur deniq; ulteriorem expositi Problemati solutionem neglexerim; jam aliquoties dictum est. Quibus si fidem non adhibeat V. Cl. vix putandum erit ut eisdem repetitis sit habiturus.

Quoniam vero tam importunus urget Clariss. V. ut vix opprobrijs abstineat ni fecerim; libuit tandem (quod prius non feceram) ut sibi satisfaciam, quæstionem illam de Cubo, ad mentem suam serio aggredi; ut videat sua de partibus aliquotis

tis myſteria nec nobis eſſe impervia, nec ſuum illud *Facile eſt illud deſpicere ad quod non poſſumus pervenire* identidem oggerat Dicimus itaque.

1. Certum eſt cujuſvis numeri primi quamlibet poteſtatem, partibus ſuis aliquotis additam, ſummam eſſe Progreſſionis Geometricæ, (puta 1, R R^2, R^3, R^4, &c.) cujus primus terminus (A) eſt 1; Radix progreſſionis ſive ratio communis (R) ille primus numerus; & numerus terminorum (T) unitate major quam Exponens dictæ poteſtatis.

2. Certum item eſt univerſaliter (per pr. 68. cap. 33. noſtræ Matheſeos Univerſalis) ſummam Geometricæ Progreſſionis eſſe $\frac{Rt-1}{R-1}A$; adeoq; in præſenti caſu, (propter $A=1$) erit $\frac{Rt-1.}{R-1}$

3. Item, cum de poteſtate Cubica jam agitur, adeoq; vel tertia, ſexta, nona, aliave cujus Exponens eſt per ternarium diviſibilis; certum eſt, T numerum terminorum (quippe unitate majorem quam eſt Exponens Poteſtatis propoſitæ) eſſe 4, 7, 10, aliumve qui numerum ternario diviſibilem unitate ſuperet.

4. Si itaq; cujusvis numeri primi poteſtatem quartam, ſeptimam, decimam, &c, unitate minutam, (nempe $Rt-1$,) per eundem numerum primum unitate minutum ($R-1$) dividamus; prodibit ejuſdem poteſtas aliqua cubica (puta tertia, ſexta, nona, &c.) partibus ſuis omnibus aliquotis addita.

5. Omnes igitur numeros primos, Centenario minores, ad hanc normam exigens, invenio, numeri, 2, cubum partibus ſuis additum, eſſe $15 = 3\times5$; ejuſdem cubicubum (ſeu poteſtatem ſextam) ſic auctum, 127 (numerum primum;) poteſtatem nonam ſic auctam, $1023 = 3\times11\times31$. Et ſimiliter in reliquis, quatenus hîc exhibentur, per factores numeros primos aggregatum illud componentes.

Radix.	Cubus partibus suis omnibus aliquotis auctus.
1.	1
2.	3×5.
2*2	127.
2×2*2.	3*111×31.
2*2×2*2.	8191.
~~3×3×3×3×3.~~	~~7*11*13×37.~~
2*2×2×2×2.	3×5*17*257.
3.	2×2×2×5.
3×3.	1093.
3×3×3.	2×2*11×11×61.
5.	2×2*3×13.
5*5.	19531.
5×5×5.	2*3×11×71×521.
7.	2×2×2×2×5×5.
11.	2×2×2×3×61.
13.	2×2×5×7*17.
17.	2×2×3×3*5×29.
19.	2×2*2×5*181.
23.	2×2*2×2×3×5×53.

Radix.	Cubus auctus.
29.	2×2*3*5×421.
31.	2×2×2×2×2*2×13×37.
37.	2×2×5×2603.
41.	2×2×3×7×29×29.
43.	2×2×2×5×5×111×37.
47.	2×2×2×2×2×3×5×13×17.
53.	2*2×3*3*3×5×281.
59.	2×2×2*3×5×1741.
61.	2×2*31×1861.
67.	2×2×2×5×17×449.
71.	2*2×2×2×3×3×2521.
73.	2×2×5×13×37×41.
79.	2×2×2×2×2×5×3121.
83.	2×2×2×3×5×7×13×53.
89.	2×2×3×3×5×17×233.
97.	2×2×5×7×7×941.

Atq; ad eandem formam, qui id operæ pretium esse putaverit, poterit vel plurium numerorum primorum Cubos expendere, vel etiam horum alias potestates Cubicas.

6. Certum est, ex hisce cubis sic exploratis, nullum esse qui solitarius rem præstabit præter 1, & cubum numeri 7. Cum enim nullus numerus primus præter, 1 potest esse quadratus non potest alius quadratus expectari, nisi ubi omnes factores sunt gemini; quod quidem ad numerum 7 videre est, nempe 2, 2; 2, 2; 5, 5. alibi nusquam.

7. Ut igitur habeatur alius quadratus, cubo suis partibus aliquotis addito æqualis, (nisi plurium numerorum primorum cubos, aut horum alias potestates, libeat expendere) sumendus erit cubus compositus ex duorum pluriumve numerorum primorum cubicis potestatibus.

8. Si duorum pluriumve numerorum primorum potesta-

te

tes quælibet invicem ducantur factus, partibus suis aliquotis auctus, æquatur facto ex componentibus partium suarum aliquotarum additione auctis. Exempli gratia; si $a^3 + a^2 + a + 1$ ducatur in $b^2 + b + 1$, habebitur aggregatum numeri $a^3 b^2$ partibus suis aliquotis aucti; quod si iterum ducatur in $c + 1$, habebitur numerus $a^3 b^2 c$ partibus suis aliquotis auctus. (Quod & universaliter ostendi potest de duobus quibusvis numeris inter se primis.)

9. Cubus igitur ex duobus pluribusve expositorum cuborum (modo non ab eodem numerò primo oriuntium) compositus, partibus suis aliquotis additus, æquabitur facto ex cubis componentibus sic auctis; exempli gratia, Quia cubus numeri 2 sic auctus, est $15 = 3 \times 5$; & numeri 3, est $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$; igitur cubus numeri $6 = 2 \times 3$, sic auctus, æquabitut numero $600 = 15 \times 40 = 3 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$. Et in reliquis similiter.

10. Ut igitur cubus sic compositus, partibus suis aliquotis auctus, fiat quadratus; tales sumendi sunt cubi componentes, ut eorum sic auctorum omnes factores primi sint gemini; hoc est, ut singuli factores primi occurrant vicibus numero paribus.

11. Quoniam igitur, inter factores expositorum cuborum sic auctorum, numeri primi ~~23~~, 41, 127, 181, 233, 257, 281, 421, 449, 521, 941, 1093, 1741, 1861, 2521, 2603, 3121, 8191, & 19531, nonnisi semel singuli reperiantur; manifestum est cubos illos ubi habentur (nempe cubos numerorum 19, 29, 37, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 89, 97, & numeri 2 cubum secundum, quartum, & quintum, & ~~sextum~~, item numeri 3 cubum secundum, & numeri 5 secundum & tertium) statim eliminandos ut huic negotio inutiles; (nisi plures adhuc cubi expendantur;) quoniam nulla expositorum cuborum compositione fieri possunt gemini. Sed & propter eliminatum cubũ numeri 61, eliminandus erit cubus tertius numeri 2, (quia jam factor 31 nusquam alias habetur.) Et propter hunc eliminatum, eliminandus erit cubus numeri 43, ubi factor 11 sibi geminum non sortietur, (jam enim nusquam alibi reperitur præterquam ad tertium cubum numeri 3, ubi jam geminus est.) Et propter hunc eliminatum, eliminandus erit & cubus numeri 31 (ubi 37 jam erit solitarius.) Denique ~~propter eliminatum~~

~~tertium~~

tertium cubum numeri 5, eliminandus eſt cubus numeri 17; quia jam nuſquam alibi reperitur 29 ſolitarius.

12. Ex reliquis qui ſuperſunt, manifeſtum eſt cubum numeri 1, quoniam multiplicando nihil immutat, compoſitioni inutilem. Item cubum numeri 7 (ubi aggregati factores ſunt omnes gemini,) poſtquam alium cubum commodum alias invenimus, uſui quidem futurum eſſe, (quoniam & cubus ille in hunc ductus factum illum dabit negotio commodum, quia quadratus in quadratum ductus erit quadratus; quod & de duobus quibuſvis cubis negotio accommodis & inter ſe primis intelligendū erit;) Sepoñendum tamen tantiſper eſſe donec iſtiuſmodi alius apparat. Quum enim ibidem factores omnes ſint jam gemini, nullum alibi factorem ſolitarium geminare poſſunt.

13. Reliquos igitur ut ſigillatim perpendamus. Quoniam factor 53, nuſpiam niſi ad numerus 23 & 83 conſpiciatur; manifeſtum eſt, vel horum cubos componendos eſſe, vel utrumque eliminandum. Quoniam vero inter factores ad horum utrumque repertos, ſimul junctos, præter 2 ſexies poſitum, & 3, 5, 53, bis poſitos, reperiantur ſolitarii 2, 7, 13; quærendi ſunt aliunde factores qui hos tres geminent. Quia vero 13 inter factores nondum eliminatos nuſquam conſpiciatur alibi quam ad numeros 47 & 5; experiamur utrumque 5 quorum ſi neuter ſuccedit, eliminandus erit numerus 83, adeoque & 23.

Ad numerum itaque 47, cum reperiantur (præter geminos) 2, 3, 5, 13, 17, qui tribus pridem ſolitariis 2, 7, 13, juncti, geminabunt quidem 2, & 13, ſed ſolitarios jam exhibent 3, 5, 7, 17. Hi vero juncti factoribus ad numerum 13 repertis (ubi ſola ſpes quærendi numero 17 geminum) propter ſolitarios ibidem 5, 7, 17, unicum 3 relinquent ſolitarium. Huic autem ſi geminum quæramus ex factoribus ad numerum 41, manebit illic 7 ſolitarius ſine ſpe comitis: Sin ex factoribus ad numerum 5, manebit illic 13 plane derelictus: Sin adeamus numerum 11, manebunt illic ſolitarii 2, & 61; quorum ſi poſteriori comitem ſumamus ex cubo tertio numeri 3, manebit tamen 2 ſolitarius ſine ſpe ſocii; (quamvis enim videatur prima fronte haberi poſſe ex numeri 3 cubo primo, id fieri ta-

mea non poteſt, quia ejuſdem numeri 3 cubus tertius jam aſſumptus primum illum in ſe comprehendit:) Sin denique (ubi ſola ſpes reliqua eſt) numerum 2 adeamus ut quæratur ſolitario 3 comes, manebit illic ſolitarius 5; cui ſi ſocium quæramus à primo cubo numeri 3, (qui ſolus ex nondum rejectis ſpem facit) manebit illic numerus 2 ſolitarius ſine ſpe comitis, (non enim aſſumi poteſt huic ſocius ex ejuſdem muneri 3 cubo tertio, ob cauſam modo dictam:) Cum itaque aliunde ſpes non ſuperſit (quod inſpectis reliquis numeris patet) conſtat, ex numeris 47 & 5, primum non ſuccedere.

Experiendus ſupereſt numerus 5; num inde ſolitariis 2, 7, 13, ſupra memoratis ſocios habere liceat. Reperiuntur autem illic (præter geminos) ſolitarii 3, & 13; qui ſolitariis 2, 7, 13, junctí, relinquunt adhuc ſolitarios 2, 3, 7. Quum vero 7 nuſpiam alias reperiatur niſi ad numeros 13, & 41; neutrobique haberi poteſt. Si enim numerum 13 adeamus, manebit illic ſolitarius ſine ſpe ſocii numerus 17 (fruſtra ſiquidem numerum 47 adeamus, utpote jam rejectum.) Sin adeamus numerum 41, habebimus quidem illic numeris 3 & 7 geminos, ſed manebit ſolitarius 2, cui nuſquam ſpes ſocii niſi à numero 3 vel 11, (non autem ab utroque ſimul;) non à 3, quia manebit illic ſolitarius 5, cui ſi ad numerum 2 quæramus comitem (neque enim aliunde ſperandus) manebit illic ſolitarius 3, cui à numero 11 fruſtra quæretur ſocius (nec tamen aliunde ſperandus) propter 2 ibidem ſine ſpe derelinquendum; neque etiam à numero 11 habebitur ſocius ſolitario pridem 2, tum enim ibidem ſolitarii erunt 3 & 61, quorum poſteriori ut ut comes ſuppeditari poſſit à tertio cubo numeri 3, reliquo tamen 3 ſocius non habebitur; fruſtra ſiquidem ſperatur à numero 2, ubi derelinquendus eſſet 5 ſolitarius. Cum itaque, omnibus penſitatis, nec à numero 5, nec à numero 47, ſuppetias ferri poſſe conſtet; eliminandus erit numerus 83, adeoque & numerus 23.

14. Cum ad numerum 47, reperiantur (præter geminos) factores ſolitarii, 2, 3, 5, 13, 17; quorum 13 non alibi reperiatur alias quam ad numerum 5, nec 17 alibi quam ad numerum 13; manifeſtum eſt vel componendos eſſe cubos numerorum 5, 13, & 47, vel ſimul omnes eliminandos.

Cum itaque ad numerum 5 habeantur factores ſolitarii 3, 13; ad

ad numerum 13, solitarii factores 5, 7, 17; atque ad numerum 47, factores solitarii 2, 3, 5, 13, 17; hi omnes conjuncti (præter eos qui conjunctione geminantur) solitarios adhuc exhibent 2 & 7. Cumque 7 non alibi (ex nondum eliminatis) quam ad numerum 41 reperiatur, componendus etiam hic erit cum tribus illis, vel omnes quatuor eliminandi. Cumque ad numerum 41 (præter geminos) reperiantur factores solitarii 3 & 7, qui additi prioribus 2 & 7, geminant quidem 7, sed solitarios adhuc exhibent 2 & 3; quærendi itaque erunt hisce comites. Quod quidem duobus modis præstabitur; nec pluribus.

Primo quidem, ad numerum 11, habentur (præter geminos) solitarii factores 2, 3, 61; qui prædictis 2 & 3 adjuncti, ipsos geminant, sed & solitarium relinquunt 61, qui tamen comitem obtinebit ex tertio cubo numeri 3, ubi item 61 est unicus factor solitarius. Adeoque si una cum præcedentibus quatuor numerorum 5, 13, 41, 47, cubis, componatur item cubus numeri 11, & cubus tertius (sive nona potestas) numeri 3; cubus ex hac compositione emergens partibus suis omnibus aliquotis additus, conficiet quadratum; cujus quidem factores primi iidem sunt atq; cuborum componentium sic auctorum omnes factores primi: nempe 2 sexdecies, 3 quater, 5, 7, 13, 17, 29, & 61, bis.

Sed & idem cubus sic inventus si in cubum numeri 7 ducatur, factus etiam & cubus erit, & additus suis partibus aliquotis faciet quadratum; addet utique prioris quadrati factoribus, 2 quater, & 5 bis.

Cum verò cubus ille sic compositus non alium ex expositis intactum relinquat quam cubum 1 (qui nihil immutat) & cubum numeri 2, qui partibus suis additus dat 3×5 qui numerus quadratus non est; (cubus enim numeri 3 primus, in tertio continetur, adeoque non iterum componendus:) patet eundem cubum sic compositum non posse cum alio ex expositis iterum componi, ut factus suis partibus additus sit quadratus.

Secundo, potest tamen qui ex cubis numerorum 5, 13, 41, 47, componitur cubus, (ubi, ut dictum est, solitarii manent factores 2 & 3,) aliter suppleri (omisso nempe cubo numeri 11, a-

deoque & tertio cubo numeri 3, qui vel, ut prius, simul sumendi, vel simul saltem rejiciendi erunt, propter factorem 61 non alibi repertum.) Cubus enim numeri 2 supplebit factores solitarios 3 & 5; cubusque primus numeri 3, supplebit solitarios factores 2 & 5; unde solitarii pridem factores 2 & 3 comites nacti sunt, & 5 utrobique repertus geminatur. Adeoque si numerorum 5, 13, 41, 47, cubi, cum cubis illis numerorum 2 & 3, componantur; cubus hac compositione emergens partibus suis aliquotis auctus, conficiet quadratum; cujus quidem factores omnes primi, (iidem nempe cum componentium cuborum sic auctorum primis factoribus,) erunt 2 quatuordecies, 3 & 5, quater, 7, 13, 17, & 29, bis.

Idemque cubus in cubum numeri 7 ductus, alium adhuc constituet cubum ut supra; qui quadrati emergentis factoribus jam enumeratis, adjunget 2 quater, & 5 bis.

Quoniam vero cubus sic compositus non alios ex expositis intactos relinquit præter cubum numeri 11, qui assumi non potest (ut dictum est) sine cubo tertio numeri 3, (qui simul admitti non potest cum ejusdem numeri 3 cubo primo qui jam ingreditur compositionem:) manifestum est cubum sic compositum non posse ulterius cum ullo expositorum cuborum componi ita ut factus sit qualis imperatur.

Sed & porro manifestum est, compositi (ut dictum est) cubi ex cubis numerorum 5, 13, 41, 47, solitarios qui restant factores 2 & 3, non aliunde habere posse comites quam vel ex cubo numeri 11, una cum tertio cubo numeri 3; vel ex cubo numeri 2 una cum numeri 3 cubo primo; (nulli utique supersunt alii præter cubos 1 & 7, quorum neque alter neque uterque id præstabunt:) Adeoque non pluribus quam dictum est modis suppleri possunt.

15. Sin hosce cubos numerorum 5, 13, 41, 47, (quos vel simul sumendos esse, vel simul omittendos, jam ostendimus) omittamus: ex reliquis componi cubum imperatum non posse constat. Cum enim (sepositis ob causas jam dictas cubis numerorum 1 & 7) non alii supersint quam cubi numerorum 2 & 11, primoque & tertio numeri 3; sumptis cubis numeri 11, & tertio numeri 3, (qui simul vel sumendi vel negligendi, propter 61 utrobique nec alias repertum) solitarii manebunt factores

&

& 3, quos ambos nec ſupplere poterit cubus numeri 2, nec admitti poteſt cubus numeri 3 primus, propter tertium jam admiſſum: Omiſſis autem tum cubo numeri 11, tum tertio numeri 3, reliquos duos, nempe cubum numeri 2, cum primo numeri 3, invicem compoſitos, rem imperatam non abſolvere certum eſt; manebunt utique factores ſolitarii 2 & 3.

16. Conſtat itaque (perpenſis omnibus) ex cubis ſuperius expoſitis, nullum eſſe cubum ſimplicem qui partibus ſuis aliquotis additus conficiet quadratum, præter cubos numerorum 1 & 7. Sed neque cubum ullum ex his ut dictum eſt compoſitum id ipſum præſtare præter quatuor illos jam indicatos: quorum nempe primus componitur ex cubis numerorum 5,13, 41,47,113,3,3: Secundus, ex iiſdem cum cubo numeri 7: Tertius, ex cubis numerorum 5,13, 41, 47, 2, 3: Quartus ex iiſdem cum cubo numeri 7.

Qui plures adhuc iſtiuſmodi cubos velit, idque operæ pretium fore putaverit, eodem modo quo nos numeros primos centenario minores expendimus, expendat licet vel plures primos numeros, vel horum ſaltem plures poteſtates. Mihi ſaltem ſufficiat, veram inveſtigandi methodum tradidiſſe, ut ſentiat tandem Freniclus me non ideo neglexiſſe priùs quod eo non potuerim pervenire.

Ad calculos autem res redacta cum fuerit, invenio quatuor illos cubos compoſitos, eoſdem plane eſſe, (& eadem forſan methodo inventos,) cum quatuor illis à D. Freniclo exhibitis.

Expoſita aut quæſtione de cubo qui partibus ſuis aliquotis additus conficiat quadratum: eâdem plane methodo utendum erit, mutatis mutandis, in altera de Quadrato qui partibus ſuis aliquotis additus conficiat cubum: Nempe numerorum primorum quouſque libet poteſtates quadraticæ (ſecunda, quadrata, ſexta, &c.) perpendendæ, ut videatur quem illæ partibus ſuis aliquotis additæ numerum efficiant, & ex quibus factoribus primis is componatur; quæ tandem poteſtates quadraticæ ita componendæ erunt, ut factores illi primi ad eas ſpectantes ſint (non ut prius gemini, ſed) terni ſimiles,

Sed & eadem clavis prudenter adhibita alia iſtiuſmodi de par-

 tibus

tibus aliquotis mysteria reserabit; quæ illis relinquo quibus lubitum est se in his negotiis exercere.

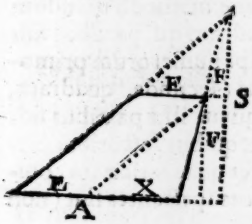
Quæstionem quod attinet à me propositam (obiter quidem, idque D. Fermatio, non D. Freniclo) de *duobus numeris quadratis qui partibus suis aliquotis additi eandem efficiant summam* (quales 16 & 25;) de cujus possibilitate quærit Freniclus: Quærit, inquam, id quod petitur. Perinde utique mihi erit sive solvat problema, sive ostendat esse insolubile (utrumvis enim faciat, justæ solutionis loco habebitur) sive denique plane negligat, (neque enim ego magni momenti rem esse judico, ut vel inde multum laudis acquirat si solvat, vel, si secus, amittat.) quoniam vero scisciatur; sciat quæstionem à me propositam solubilem esse, idque mihi certò constare.

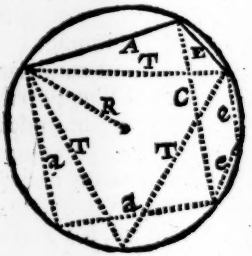
Theorema deniq; quod attinet à me propositum pridem, cujus demonstrationem (ut ais) aliunde non expectas, atque à me expetis: libet hic subjungere tum ipsum Theorema, tum ejusdem Demonstrationem.

Theorema.

Sit Pyramidis vel Coni Frustum (parallelis planis abscisum:) Cujus Basis major, æquetur quadrato rectæ A; *minor, quadrato rectæ* E; *Altitudo,* F. *Dico.*

Si cruribus A E (*vel his æqualibus*) *constituatur angulus graduum* 120, *& compleatur Triangulum, eique circumscribatur circulus: Quadratum Radii circuli circumscripti, in Altitudinem Frusti ductum,* (Rq F,) *æquatur Frusto.*





Demon-

Demonſtratio.

Differentia rectarum A E, dicatur $X = A - E$. Et fiat, ut X ad F, ſic A ad S, & E ad P. Erit S, altitudo totius Pyramidis vel Coni: P, partis ad verticem abſciſſæ. Adeoque SAq, triplum totius Pyramidis vel Coni; PEq, triplum partis abſciſſæ; & $SAq - PEq$, reſidui Fruſti triplum.

Eſt autem $S = \frac{FA}{X}$, $P = \frac{FE}{X}$, ergo $SAq - PEq = \frac{FAc - FEc}{X = A - E} = \frac{Ac - Ec}{A - E} F$, triplum Fruſti.

Sed eſt $Ac - Ec = Aq + AE + Eq$ in $A - E$. Ergo $\frac{Ac - Ec}{A - E} = Aq + AE + Eq$. Et propterea $Aq + AE + Eq$ in F, triplum Fruſti.

Si autem formetur Triangulum ut dictum eſt; Quadratum Baſis Tq æquabitur tribus $Aq + AE + Eq$ ſimul ſumptis. Sed & idem Tq, æquabitur $3Rq$, triplo quadrato Radii circumſcripti circuli. (quorum utrumque ſtatim demonſtrabitur.) Adeoq; tum $TqF = 3RqF$ eſt triplum Fruſti, tum RqF Fruſto æquale. quod erat propoſitum.

quod autem probandum ſuſcepimus, $Aq + AE + Eq = Tq = 3Rq$. Sic oſtendimus.

Si Triangulum ut dictum eſt circulo inſcribatur; cum Angulus cruribus AE contentus ſit Angulus in Peripheria, grad. 120, adeoque inſiſtat arcui graduum 240; recta T complens triangulum erit chorda tum arcûs graduum 240, tum & arcûs graduum 120, (reſidui nempe ad integrum circulum:) Adeoque latus erit Trigoni regularis inſcripti. Et propterea $Tq = 3Rq$.

Sed et $Aq + AE + Eq = 3Rq$. quod ſic probatur.

Si recta A ponatur ſubtenſa arcûs ſimpli, erit arcûs tripli ſubtenſa $3A - \frac{Ac}{Rq}$. Sin ponatur E ſubtenſa arcûs ſimpli, erit hujus arcûs triplicati ſubtenſa $3E - \frac{Ec}{Rq}$. Eſt autem una eademq; recta, puta C, tum Arcus A triplicati, tum triplicati arcûs E, ſubtenſa. (Cum enim AE, ſimul ſumpti, compleant trientem circuli,

circuli; utrique triplicati complebunt circulum integrum. Adeoque quæ ex una parte ſubtendit triplo arcus A, eadem recta ex altera parte ſubtendit triplo arcus E, quippe reſiduo ad integrum circulum. Et propterea $3A - \frac{Ac}{Rq} = (C =) 3E - \frac{Ec}{Rq}$. Et $3RqA - Ac = 3RqE - Ec$. Et $3RqA - 3RqE = Ac - Ec$. Adeoque $3Rq = \frac{Ac - Ec}{A - E} = Aq + AE + Eq$. Quod demonſtrandum ſuſcepimus.

Vel ſic brevius. (ſine ope rectæ T, quæ nulla neceſſitate ſed perſpicuitatis cauſa additur.)

Quoniam $A - E. F :: A. \frac{FA}{A-E} :: E. \frac{FE}{A-E}$. Eſt $\frac{FA - FEc}{A-E} = \frac{Ac - Ec}{A-E} F$, triplum Fruſti.

Sed & (propter angulum gr. 120.) arcus A, E, ſimul, complent trientem circuli; eorumque tripli, circulum integrum; qui (tripli) propterea eandem habebunt ſubtenſam. Nempe $3A - \frac{Ac}{Rq} = 3E - \frac{Ec}{Rq}$. Adeoque $3RqA - Ac = 3RqE - Ec$; & $3RqA - 3RqE = Ac - Ec$; & $3Rq = \frac{Ac - Ec}{A - E}$

Ergo $3RqF$ fruſti triplum, & RqF fruſto æquale, quod erat propoſitum.

Supereſt tandem ut prolixæ importunitatis veniam orem; atque ut exorem porro, ſi per te liceat, ut quem hactenus tibi demeruiſti, amare adhuc ne dedigneris,

Oxonii, Mart 4. 165$\frac{7}{8}$. *Stilo Angliæ.*

Illuſtriſſime Domine,

Humillimum pariter, & *devinctiſſimum ſervum,*

Joh. VVallis.

Ubi circuli quadraturam à me *perperam* inveſtigatam inſinuat, quid ſibi velit vir Nobiliſſimus non ſatis aſſequor. Quam ego quadraturam exhibui hæc erat.

Ut *factum ex quadratis numerorum imparium* 3, 5, 7, 9, *&c. in infinitum*; ad *factum ex iisdem quadratis unitate minutis*; ſic *quadratum diametri*, ad *aream circuli.*

Ubicunque autem continuam illam quadratorum multiplicationem abrumpere libeat; intra hos limites res coercebitur: *Si factum ex quadratis ducatur in radicem quadraticam unitatis auctæ aliquotâ ſui parte quæ denominatur à radice ultimi quadrati*, habetur quantitas *juſtâ major*: ſin *quæ denominatur ab eadem radice unitate auctâ*, habebitur quantitas *juſtâ minor*. Sic $9\times25\times49\times81\times\sqrt{1\tfrac{1}{9}}$ ad $8\times24\times48\times80$, eſt ratio major, quam quadrati ad circulum; at $9\times25\times49\times81\times\sqrt{1\tfrac{1}{10}}$ ad $8\times24\times48\times80$, eſt ratio minor quam quadrati ad circulum.

Addo; eandem eſſe rationem rectanguli ſub conjugatis axibus, (vel etiam pallelogrammi cujusvis circumſcripti,) ad aream Ellipſeos.

Hanc quadraturam ſi *falſam* putaverit Vir Nobiliſſimus, ſi potis eſt, refellat. Oſtendat, inquam, rationem circuli ad quadratum diametri, vel majorem eſſe, vel minorem, quâ quę à nobis aſſignatur. Sin levius aliquod inſinuet, ob quod non placeat; aut contemnendam putaverit: nolo ego ſua ſibi verba reponere, *facile eſt ea deſpicere ad quæ non datur aſſequi*: ſed illud potius,

—Siquid noviſti rectius iſtis, Candidus imperti.—

EPISTOLA XXIV.

D. Vice-Comitis Brounker *ad D.* Joh. Wallis

SIR

I have herewith ſent you a Copy of what I have written to Sr *Kenelme Digby*,* (upon the peruſal of theſe others from him) to be ſent with your former, in caſe it be not allready gone; or at leaſt to follow it. Which is all time will now permit

*Epiſt. XXVII

mit me to ſay, excepting what I muſt not forget, ſtill to aſſure you, that I am,

SIR,

Your moſt faithfull friend and ſervant
Brounker.

13 March 165⅔.

EPISTOLA XXV.

D. Kenelmi Digby *ad* D. Joh. Wallis.
præcedenti incluſa, una cum ſubſequente.

I hope you have ere this received mine to you of the 6 of this moneth; in which I encloſed a copy of a paper addreſſed to me that Monſ. *Frenicle* wrote ſuddainly and immediatly upon ſight of the letter you were pleaſed to honor me withall of the 21 *Novemb.* paſt (which lay ſo long upon the way.) That paper contained his reflections but upon the firſt part of your letter; the time not permitting him to write more then. The next morning he went out of towne for ſome dayes; but at his returne he entreated of me a ſecond peruſall of your letter, and brought it me back the next morning, together with the encloſed paper in anſwere to the ſecond part of yours: which he hath framed as though it were a third perſon that wrote it, and hath deſired me to conceale his name, leſt it might be thought he made vanity of having ſome extraordinary knowledge in a ſcience that he profeſſeth to be very ignorant of, as having never had any Maſter in it, nor having ſcarce ſtudyed it, but meerely played with it for his recreation and to ſatisfie the propenſion of his Genius. But I that profeſſe candor and open dealing in every thing and with every body, would not let you remaine in the darke in knowing who is your Antagoniſt, ſince I have knowledge of him: who though he paſſe in his owne conceit for a very ſlight Mathematician; yet in that part of it which concerneth numbers, all France, even Monſ. *Reberval* and Monſ. *Fermat*, (and Monſ. *des Cartes*, when he was alive) doe acknowledge him their Maſter, and ſuperior to them at a huge diſtance. And cheifly, for that what they do with much labour, and

by

by many circuits and operations, he doth immediatly upon the ſight of the queſtion, and without any operation, as though he had an intuitive knowledge of thoſe things, and all his trouble is to ſet it downe in paper. However, I debated much with my ſelfe, whether or no I ſhould ſend you theſe two laſt papers: for though the expreſſions in them be modeſt and gentle in compariſon of what learned men in theſe parts do write one againſt an other (as you may ſee in the diſputes betweene *Gaſſendus* and *des Cartes*, *Morinus* and *Gaſſendus*, *des Cartes* and *Fermat*, *Fermat* and *Frenicle*) yet me thinketh they are tarter than we vſe in England, or than I am ſure I ſhould uſe in the like caſe, if *I* were of a different opinion. But that which mainely turned the ſcale with me, was the conſidering, that if you did not ſee what theſe perſons ſay to you, and conſequently ſhould make no reply to them, they might thinke they had the better of our nation, and Vniverſity: which *I* am ſure you will take a courſe ſhall not be, when once you know what is objected againſt you. And beſides, *I* thought it belonged to that reſpect *I* owe and profeſſe unto you, that you ſhould be acquainted with whatſoever *I* hear concerning you.

It is hard for me to put limits to my penne when *I* am diſcourſing with you; ſo much content *I* have, in keeping preſent to my thoughts ſo excellent a perſon. But I muſt not be ſo much a ſelfe-lover, as to delight my ſelfe at too great a charge of your ſufferance and wearying. *I* will therefore trouble you no longer for the preſent, but kiſſing your hands do take leave and reſt

Your moſt humble and moſt affectionate ſervant,

Paris, 20 *Febr.* 1658.
10 7.

KENELME DIGBY.

Monſ. *Frenicle* deſires very much to ſee what ſatisfaction you give to the Probleme your ſelfe propoſed: that then you may ſee what he ſayth to it.

EPISTOLA XXVI.

D. de Frenicle, *ad D.* Kenelmum Digby.

Silentio præterire maluiſſem, Vir Illuſtriſſime, cætera quæ in Epiſtola Clariſſimi Walliſii circa numeros diſcutienda ſuperſunt, quam in ſingulis immorari; ſed cum à me quid de his ſentiam expectes, non æquum eſt ut deſiderio tuo defraudem.

Sequitur aliud problema Clariſſimi Viri D. Fermat.

Exponit primum Fermatius (ut habetur in Epiſtola VValliſii) Theorema quoddam his verbis.

Dato quovis numero non quadrato, dantur infiniti quadrati, qui in datum numerum ducti adſcita unitate conficiant quadratum. Et exemplum præbet numeri 3, qui ductus in quadratos 1, vel 16, adſcita unitate conficit quadratos 4, & 49. & aſſerit eſſe infinitos alios qui in 3 ducti idem præſtent: quibus inveniendis legitimam methodum tradit VValliſius.

Sed pace ſua dixerim, hoc quidem, nempe quod ſint infiniti quadrati, qui in 3, vel in alium numerum non quadratum ducti faciant quadratum, eſt expoſitum Theorema, quod ſe demonſtraſſe affirmat Fermatius & quod affert ad exemplum tantum & ad præparationem; non igitur eſt problema quod ſolvendum proponitur. Quæruntur enim quadrati qui in quemlibet numerum non quadratum ducti adſcita unitate faciant quadratum ad inſtar numeri 3, qui in quadratos 1, & 16, ductus adſcita unitate facit quadratos; unde ſatis patet numeros integros pro quæſitis quadratis requiri. Certe poſſet excuſari VValliſius ſi D. Fermat nullum exemplum; vel ſi in fractis etiam ut in integris propoſuiſſet; ſed cum in integris ſolummodo datum ſit exemplum ſatis debuit intelligi ſolutionem in integris requiri, ut ipſe poſtea Fermatius aperte declaravit, quærit enim numeros quales ſunt 3, & 16, apparet igitur VValliſium æquivocationes quærere, ut problema eludat, & ipſum quod facilius erat ſelegiſſe & quod magis arduum ſubterfugiſſe. Cum igitur requirantur numeri quadrati, & nulla alia in ſolutione perſpiciam quam ſpecies ſeu litteras & characteres quorum nonnulli mihi

ſunt

sunt inusitati, & quibus numeri & quadrati referuntur; & quadrati quæsiti minimè exprimantur, sed omnes ignoti remanent; non video quomodo quæstioni quæ postulabat certos quosdam quadratos, fit satisfactum: Fermatius enim quærebat ad exemplum cæterorum inveniendorum, ut quadrati exhiberentur qui ducti in numeros 61, 109, 127, adscita unitate quadratos conficerent. Et certè si quilibet quadratus æquè inventu facilis esset, ut in fractis evenit, nequaquam hos numeros potius quam alios elegisset.

Sed jam ad integros quid affert VVallisius? nullum profecto quadratum profert ex his qui requiruntur, nempe qui in alium numerum quam in 3, à Fermatio propositum ductus assita unitate faciat quadratum, & agnoscit suum canonem exhibere non quidem solos quadratos integros sed omnes promiscue tam integros quam fractos. Certe si methodum integros à fractis segregandi invenisset proculdubio quæstionem solvisset. Sed cum sint innumeri fracti pro quovis integro & perpauci quadrati integri si fractis comparentur; si non adsit methodus quædam qua ista segregatio fieri possit, & si talis perquisitio casu sit perficienda, tantum esset, quam si unio vel adamas in tota maris arena conquirenda traderetur, vel acus, ut communi fertur adagio, in ingenti fœni acervo. Si vero talem quamdam methodum habet, cujus beneficio quadrati aliis numeris inservientes reperiri possint, cum in D. Freniclis opusculo latino dentur quadrati ad singulos numeros non quadratos usq; ad 150. ipse illos producat usque ad 200, vel si non vacat tot numeros perquirere, in sequenti tantum 151, nè dicam 313, qui quidem forsitan vires ejus excederet, sese exerceat Vir Clarissimus, alias nusquam mihi persuasum erit ipsam problematis solutionem esse assecutum; neq; illum omnes omnino quadratos pro singulis numeris, vel saltem unum quadratum pro quolibet numero præstiturum; cum unus tantum pro numero 151, vel 313, postuletur. Cum enim se demonstrare dicat, suam methodum omnes quadratos exhibere; nulla erit melior demonstratio quam numerorum exhibitio, præsertim cum pauci tantum quærantur. Vel saltem deducat cum methodo quadam certa quadratos inservientes numeris 61. & 109. qui habentur in 2ª & 3ª columna tabellæ in prædicto Freniclis opusculo exhibitæ;

hibitæ; vel numeros investiget 4ª columnæ ejusdem tabellæ, quorum ope prædicti quadrati facillimè construi possunt; cum enim in tabella quæsiti quadrati habeantur, multo minor profecto difficultas inerit in his quæ requiruntur,

Restat ultima solutio D. VVallisii, in qua multoties binos cubos tradit quorum summa æqualis est duobus aliis cubis. Hæc quæstio facillima esse debet, cum tu noveris illam pluribus modis tam facile solutam esse; attamen quamquam VVallisius multos dederit cubos, nullos plane tradidit præter eos quos sola multiplicatione aut divisione ab illo deduxit, quos à Frenicle acceptos ad ipsum transmisisti, & si habeas exemplar Epistolæ tuæ ad ipsum VVallisium in qua ipsi cubi continebantur, facile cognosces quinque sequentes Cuborum copulationes inter ipsos cubos reperiri. Istis autem quinque tota cuborum series à VVallisio data innititur.

Cuborum radices.

1ª. $1+12=9+10$.

2ª. $2+16=9+15$.

3ª. $10+27=19+24$.

4ª. $2+34=15+33$.

5ª. $9+34=16+33$.

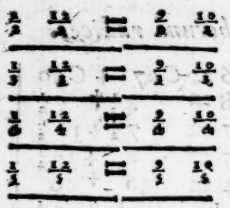
Aliæ vero quæ sequuntur Cuborum copulationes numero 22. illæ sunt quas VVallisius dicit à Frenicleis differre, post quarum quamlibet positi sunt numeri indicantes de qua ex quinque copulationibus suprapositis quæque sint desumptæ; & per quem numerum cubos à nobilitate tua acceptos ad suorum constructionem vel diviserit vel multiplicaverit: nempe particula, *in*, indicat multiplicationem, & particula, *per*, denotat divisionem.

Cuborum

Cuborum radices.

☾ 3	+	☾ 36	=	☾ 27	+	☾ 30		1ª. in 3.
1	+	8	=	$4\frac{1}{2}$	+	$7\frac{1}{2}$		2ª. per 2.
1	+	17	=	$7\frac{1}{2}$	+	$16\frac{1}{2}$		4ª. per 2.
$4\frac{1}{2}$	+	17	=	8	+	$16\frac{1}{2}$		5ª. per 2.
8	+	64	=	36	+	60		2ª. in 4.
3	+	$11\frac{1}{3}$	=	11	+	$5\frac{1}{3}$		5. per 3.
5	+	40	=	$22\frac{1}{2}$	+	$37\frac{1}{2}$		2. in $2\frac{1}{2}$.
20	+	54	=	38	+	48		3. in 2.
60	+	132	=	8	+	136		4. in 4.
8	+	$6\frac{1}{3}$	=	$3\frac{1}{3}$	+	9		3. per 3.
48	+	99	=	27	+	102		5. in 3.
$\frac{1}{2}$	+	6	=	$4\frac{1}{2}$	+	5		1. per 2.
6	+	10	=	$1\frac{1}{3}$	+	$10\frac{2}{3}$		2. in $\frac{2}{3}$.
5	+	11	=	$\frac{2}{3}$	+	$11\frac{1}{3}$		4. per 3.
$\frac{2}{3}$	+	$5\frac{1}{3}$	=	3	+	5		2. per 3.
6	+	48	=	27	+	45		2. in 3.
10	+	80	=	45	+	75		2. in 5.
32	+	66	=	18	+	68		5. in 2.
30	+	66	=	4	+	68		4. in 2.
4	+	48	=	36	+	40		1. in 4.
30	+	81	=	57	+	72		3. in 3.
5	+	60	=	45	+	50		1. in 5

Unde non eſt quod mireris ſi tam facile unius horæ ſpatio vel centum præbere ſpondeat; quid enim facilius quam exiguos numeros multiplicare vel dividere, & certe cum unica tantum cuborum copulatione pluries milleni facillime & abſque ullo negotio exhiberi poſſunt. Non enim in hac operatione major ineſt labor, nec ſubtiliore indagatione vel induſtria indiget, quam multiplicare terminos cujuſlibet copulationis datæ, 1ª verbi gratia, nempe 1, 12. = 9, 10. per ſingulos ordine numeros, 2, 3, 4, 5, &c. & ſic ad libitum procedere: vel quod facilius eſt applicare (dividendo) ſingulos numeros cuborum radicibus, ut videre eſt in ſequenti tabella, & ſic in infinitum; ubi nulla opus eſt vel multiplicatione vel diviſione, niſi ſi lubet ad reductionem.



Nulla igitur illi neceſſitas inerat tam varie 5 illas cuborum copulationes implicare niſi quod fucatas ſuas ſolutiones & ex datis deductas magis latere voluerit; melius fuiſſet equidem vel de his omnino reticere, vel aliquas novas & datarum non multiplices præſtare, præſertim cum inventu facillimæ ſint, quales ſunt quæ ſequuntur etiam ab ipſo Frenicle provenientes; & in quibus 4 termini nullam habent communem menſuram.

Cuborum radices.

C.	17	+	39	=	26	+	30
	12	+	40	=	31	+	33
	12	+	51	=	38	+	43
	8	+	53	=	29	+	50
	17	+	55	=	24	+	54
	9	+	58	=	22	+	57
	3	+	60	=	22	+	59
	30	+	67	=	51	+	58
	42	+	69	=	56	+	61
	17	+	76	=	38	+	73
	5	+	76	=	48	+	69
	15	+	80	=	54	+	71
	51	+	82	=	64	+	75

Non convenit igitur ut in his minutiſſimis rebus, quæ vix in parvulis laudem aliquam promererentur, vires ſuas probatas eſſe jactitet, ſin minus non eſt quod Atlanteos auſus aggrediatur. Cæterum declinaſſe mihi videtur à ſolutione horum proble-

problematum in quibus nulla eſt ambiguitas circa numeros integros ſeu fractos; nempe, Datum numerum cubum in duos cubos rationales dividere; & Datum numerum ex duobus cubis compoſitum, ut 28, in duos alios cubos rationales dividere. In quibus ſatis apparet numeros integros non poſſe quæſitis ſemper ſatisfacere, & idcirco fractos etiam eſſe adhibendos.

Hæc ſunt, Vir Nobiliſſime, quæ mihi modo in mentem venerunt circa ſolutiones VVallifii ad Fermatii quæſtiones numericas & quæ de his cenſeam. Quæ quidem nullo modo ſcribere ſuſcepiſſem, niſi ad obtemperandum tuis mandatis, ad quæ me ſemper paratiſſimum invenies. Vale.

EPISTOLA XXVII.

D. Vice-Comitis Brouncker *ad D.* Kenelmum Digby.

Sir,

ABout a fortnight or three weeks ſince, I received yours of the 6. of *Febr.* wherewithyou were pleaſed to honour me; for which I moſt humbly thank you. And yeſterday I met with yours of $\frac{20}{10}$ *Febr.* $165\frac{8}{7}$ to Dr. *Wallis*, which with the incloſed from Mounſ. *Frenicle* (according to the liberty you give me) I have peruſed; and doe thereby perceive that the laſt letter from Dr. *Wallis* (of a date I think not much later than mine, which had the good fortune to kiſſe your hands) hath not been yet received (though in the abſence of Mr. *White* Mr. *Farrar* undertook to ſend it ſafely.) For otherwiſe I am confident Mounſ. *Frenicle* had omitted the greateſt part at leaſt, of what he hath been pleaſed to ſay in both thoſe papers: Becauſe that preſents you a very eaſie, plain, and certain method for the ſolving of that Probleme in Integers. For (notwithſtanding that Mounſ. *Frenicle* is pleaſed to ſay, ——*Cum in D. Frenicli opuſculo Latino dentur quadrati ad ſingulos numeros non quadratos uſque ad* 150, *ipſe illos producat uſque ad* 200: *vel ſi non vacat tot numeros perquirere, in ſequenti tantum* 151, *ne dicam* 313, *qui quidem forſitan vires ejus excederet, ſeſe exerceat vir Clariſſimus: alias*, &c.)

within the space of an hour or two at most this morning, according to the method therein delivered, I found that $313 \times 97170685 - 1 = Q126862368$. and therefore that $313 \times Q(2 \times 97170685 \times 126862368 =)\ 18193801585641 60, +1. = Q32188120829434849$. which I thought fit to present you, because Mouns. *Frenicle* may thence perceive, that nothing is wanting for the perfect solution of that Probleme. It remains onely now (Noble Sir) that I assure you, that my Father and Mother could not, nor any other can more honour and esteem you, nor be prouder of your friendship, than doth, and is,

13 *March* 165$\frac{3}{4}$.

Sir,
Your most humble and most faithfull servant

BROUNKER.

EPISTOLA XXVIII.

D. Joh. Wallis *ad D.* Kenelmi Digby.

Illustrissime vir,

Literis quibus me dignatus es Tuis, 6 Febr. datis, simul cum Frenicleis inclusis, jam ante responsum dederam, quam sequentes $\frac{20}{16}$ Febr. (quas hac hora accipio) ad meas manus pervenerant. Persentio autem (quod doleo) quas jam antea miseram Decemb. 26. datas, te nondum accepisse cum ultimæ illæ tuæ mitterentur. Quas quidem si vidisset D. Freniclus, certum est se literas ipsius ultimas, vel integras vel maximam saltem partem, omissurum fuisse, si non & præcedentes.

D. Fermatii Problema quod spectat, *De infinitis numeris quadratis, qui in non-quadratum ducti, unitate deficiant a quadrato*, cum præfixo Theoremate (quorum utrumque erat propositum, nobis saltem, nescio an & Freniclo; ut non sit cur illud mihi tanquam ἀπρόσδιόνυσον objiciat:) neque id in numeris Fractis tantum, sed &

& in Integris. Postquam enim de Integris se exposuerat Fermatius, docuimus & Integros à Fractis secernere : eaque omnia præstitimus quæ jam postulat Freniclus; quod nec ipse diffitebitur ubi literas illas nactus fuerit Dec. 26 datas. Nec regulas tantum exhibuimus, (quod tamen exhibuisse sufficeret,) sed & earundem praxin ostendimus; non quidem in numeris 61, 109, 127, qui fuerant, uti videtur, Freniclo propositi; at saltem in numeris nihilo facilioribus, 109, 149, 433, qui à Fermatio fuerant propositi nobis. Quod & jam nuperrime præstitit D. Vicecomes Brouncker in numero 313, quem ut nobis insuperabilem proponit Freniclus. Quod & eadem facilitate fiet de numero 151 aut quovis alio. Nec dubitabit Freniclus, ubi literas supra memoratas acceperit; quin nodum illum perfecte intelligamus.

Quod autem innuit me, dum plures cuborum combinationes dederim, qui essent bini binis æquales, nonnisi paucas istiusmodi combinationes æqualiter vel multiplicasse vel divisisse: Id omnino verum est. Neque tamen est cur id in me culpet, cum & ipse mihi in eadem semita præiverit. Numeri enim qui ad me perferebantur tanquam ab ipso exhibiti, hi erant,

$$1729 = C9 + C10 = C1 + C12.$$
$$4104 = C9 + C15 = C2 + C16.$$
$$13832 = C18 + C20 = C2 + C24.$$
$$32832 = C18 + C30 = C4 + C32.$$
$$\&c. \qquad \&c.$$

Ubi manifestum est numeros in combinatione tertia & quarta; non alios esse quam numerorum in prima & secunda æquimultiplices. Quam autem illud facile fiat, non ignorat Freniclus, sed nec nobis spero invidebit quod & ipse noverim. Cognita enim istiusmodi vel unica combinatione (sive ex inspectâ numerorum cuborum tabella, sive sumpta aliqua ex iis quos indicavit Freniclus, sive quocunque demum modo habeatur) infinitos protenus alios exhiberi posse certum est. Si enim verbi verbi gratia $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$, erit & $a^3e^3 + b^3e^3 = c^3e^3 + d^3e^3$, quicunque assumatur cubus e^3, integer vel fractus. Similiter si vel unus aliquis cubus in duos alios dividi poterit, poterit &

quilibet cubus datus ſic dividi; ſi enim verbi gratia $b^3 = c^3 + d^3$, erit & $b^3 e^3 = c^3 e^3 + d^3 e^3$. Addo & idem obtinere in quæſtione à me propoſita. Verbi gratia. Cum 16 & 25 partibus ſuis aliquotis additi æquales ſummas efficiant, id ipſum non minus facient $16 e^2$ & $25 e^2$ quicunque aſſumatur e^2, modo ſint tum e^2, 16, tum e^2 25, numeri inter ſe primi. Quod nec D. Frenclum latere ſcio.

Fermatii Problema de *numero cubo qui partibus ſuis aliquotis additus faciat Quadratum*; in nuperis meis Mart. 4. datis, enucleatum dedimus, ut non ſit cur de hoc hæreat vir Nobiliſſimus. Ne tamen cauſetur adhuc me methodos tantum exhibere, non autem & numeros, ſaltem non à ſuis diverſos, libuit & hos ſex cubos ſubjungere, qui partibus ſuis aliquotis additi faciant quadratos.

Cuborum radices.

$2 \times 3 \times 5 \times 13 \times 17 \times 31 \times 41 \times 191.$
$2 * 3 * 5 * 7 \times 13 \times 17 \times 31 \times 41 * 191.$
$3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11 \times 13 \times 17 \times 31 \times 41 * 191.$
$3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 * 11 \times 13 \times 17 \times 31 \times 41 * 191.$
$17 \times 31 \times 47 \times 191.$
$7 \times 17 * 31 \times 47 * 191.$

Radices Quadratorum.

2 [*duodecies*] $\times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 13 \times 17 \times \overline{29} \times 29 \times 37.$
2 [*quatuordecies*] $* 3 \times 3 \times 3 \times 5 * 5 \times 5 \times 7 \times 13 * \overline{17} * 29 \times 29 \times 37.$
2 [*tredecies*] $\times 3 \times 3 \times 3 * 5 * 7 * \overline{11} \times \overline{13} \times 17 \times 29 \times 29 \times 37 \times 61.$
2 [*quindecies*] $\times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 * 29 \times 29 \times 37 \times 61,$
2 [*decies*] $\times 3 \times 3 \times 5 * 13 \times 17 * 29 \times 37.$
2 [*duodecies*] $\times 3 \times 3 \times 5 * 5 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37.$

Addo etiam, horum ſecundum & quartum Frenicli quæſito de duobus cubis ſub finem pag. 3. Inquiſitionis ſuæ expoſitis, ſatisfacere.

Quid autem ego de hujuſmodi Inquiſitionibus numeroſis cenſeam, jam antehac dictum eſt, nec repeto; & quam invitus huc adducar. Quod tamen, tum ut importunis duorum Clariſſimorum virorum ſolicitationibus ſatisfacerem, tum præſertim ne tuis deeſſem mandatis, non erat refugiendum. At interim (tantorum

torum pace virorum dictum esto) non video quin ad solidum Matheseos profectum magis conducat, si Clarissimi viri, quæ sibi putant peculiaria, orbi literato methodice exponant, quam ut quæ ipsi se putant invenisse, proponant aliis (actum agendo) denuo invenire; nec minus inde quam hinc gloriæ sint reportaturi. Vale, Vir Nobilissime, & favere pergas, oro,

Oxonii Mart. 15. 165$\frac{7}{8}$. *St. Angl.*

Humillimo Tuo, Tibique obsequentissimo servo,

Joh. Wallis.

EPISTOLA XXIX.

D. Wallis *ad D. Vicecomitem* Brouncker.

Mittebam Tibi jam ante quatriduum, Vir Illustrissime, ad secundas D. *Frenicli* literas responsum, eodem die quo ipsas post prandium acceperam raptim exaratum, propter cursorem postero mane abiturum; neq; per tempus tum licuit te quicquam ea de re affari. Quam ille nostra carpat, elevet, sugillet omnia, & contemptim habeat, tu vel non monitus animadvertis; quamque illud sine causa faciat, probe noveris. Quod sive genio Viri dandum, sive gentis, non inquiro. Mihi saltem negligenda videntur istæc omnia quæ huc spectant, ut quæ apud cordatos viros, saltem Mathematicos, nihil significant, quæque vel ipso judice, protinus evanescent quum primum literas nostras jam pridem scriptas videris, (saltem si & illas *Ian.* 20. ad te datas transmiseris, quæ appendicem literarum *Dec.* 17. datarum fusius exponunt.)

Memineris, credo, quanto cum fervore, in literis primis, nostrum ad primores duas Fermatii quæstiones responsum repudiaverit; quod nempe *Unitatem* exhibendo nullum exhibuerim vel *Quadratum* vel *Cubum*: quam autem sibi parum constans sit, vides; cum literis secundis, (quasi cavilli sui oblitus) Unitatem ipse nunc pro *Cubo*, nunc pro *Quadrato*, jam iterum exhibeat.

Quanta

quantâ vero cum confidentiâ sibi persuadeat nos, neque duas illas, neque etiam Fermatii tertiam suo sensu solvere potuisse, vel etiamnum posse, quamque insultet plane, & triumphetur, & tanquam cum pueris colludat, neque nescis; neque, quam vana sit ea confidentia; cum eis omnibus satisfactum sit etiam ad mentem suam. Ego autem tacitus patiar, ut receptum ipse sibi canat, ubi viderit quam ante victoriam cecinerit triumphum. Poteris tamen novissimis meis literis, si forte nondum transmiseris, hos duos quos jam petit numeros subjungere, nequo forsan casu præcedentes literæ perierint.

313 × Q: 181938015856416c: + 1. = Q: 32188120829134849:
151 × Q: 140634693 : + 1. = Q: 1728148040.

Sed & vides, non modo de quæstionibus Fermatianis suspicacē esse Clar. Virum, verùm & de nostris. Avet utique audire, quid ipse ausim asseverare de quæstione à me obiter proposita, *de duobus quadratis; qui partibus suis aliquotis additi eandem efficiant summam*; securus forsan nos adeo rerum rudes esse ut ne nostras ipsi intelligamus. Neque id semel tantum primis literis, sed & secunda vice per Nobilissimum Digbæum exigit. Quid de hac re dictum sit, vides. Quamquam enim ego illud ad solventis munus pertinere putaverim determinare, num proposita quæstio sit solubilis necne; quoniam tamen id à nobis sciscitatur: Respondi jamjam, *solubilem esse*; (addam etiam, si velit, solubilem *ad mentem suam:*) Ostendi insuper, non modo 16 & 25 à me exhibitos tales esse, sed & horum, per quemvis quadratum qui utrique primus sit, æquimultiplices, puta 16 × 9, & 25 × 9. item 16×49, & 25 × 49, &c.

Regeret fortasse, *solutionem hanc legitimam non esse, & quæ eruditum virum deceat.* At quidni? Nempe, quia facilis est, *nec aliud quam numerum in 2 vel 3, vel alium numerum ducere*, &c. At inquam, non ideo minus solvitur problema, quia *facile* solvitur. Et quidem, utut *dato* (ut loquitur) *triangulo rectangulo* 3, 4, 5, (hoc est, cujus litera sint ad invicem in ratione numerorum 3, 4, 5,) *aliud tale quæreretur* (nempe, cujus latera numeris rationalibus explicentur) non sufficeret fortasse *ipsius multiplum* 6, 8, 10, *exhibere* (quia nempe non esset hoc *aliud specie Triangulum*, sed illud ipsum

ipſum, quippe cujus latera ſunt in ratione numerorum 3, 4, 5, ſunt & eadem in ratione 6, 8, 10, &c.) Attamen expoſitis *tribus numeris* 3, 4, 5, quorum unius quadratus reliquorum quadratos ſimul æquet; ſi tales alii quærantur: rectiſſime reſpondebitur, & παθηματικωτάτως, eorundem duplos, triplos, quadruplos, alioſve quoſvis æquimultiplos id ipſum præſtare; quippe hos *alios numeros* eſſe non eſt qui diffitebitur. Quique hoc reſponſum nollet, vel deberet illud interpoſita limitatione præcludere, vel imperfecte rem propoſuiſſe cenſendus erit, & parum ἀκριβῶς, (problemata ſiquidem Mathematica ſtricti juris eſſe, ſat novit vir Clariſſimus.) Certe qui porrectam facilis reſponſi anſam arripit neutiquam propterea culpandus erit, cenſendus potius parum oculatus ni cernat. Et miror quidem acumen Clariſſimi viri, ſi non & hoc agnoſcat. Ego certe, ſi id reſponſi porrigat ad problema noſtrum, (cum illud non præcluſerim;) tantum abeſt ut pro juſta ſolutione non habeam, ut παίγνιμα ſim habiturus ni fecerit. Proinde utique erit acſi quærenti numerum qui ſit per 2 & 3 diviſibilis, exhibeat 126, 132, &c. neglectis interim 6, & 12.

Sin ipſe porro interrogaveris, Annon adhuc alii exſtent quadrati (præter 16, 25, & horum æquimultiplos) qui rem eandem præſtent: Dicam aperte, vir Illuſtriſſime, Tibi ſaltem (& quidem, ſi Tibi videbitur, nè diutius illum ſolicitum teneamus, quin id ipſum Freniclo tranſmittas non repugno;) alios adhuc eſſe, & quidem quamplurimos, utut eos exhibere minime teneamur. Ne tamen id gratis dixiſſe videar, quadrati, inquam, numerorum $8\times3\times37$, & $2\times19\times29$, partibus ſuis aliquotis additi eandem ſummam efficiunt; (quod & pariter intelligendum erit de iiſdem per quadratum quemvis qui ſit utrique primus multiplicatis.) Nempe

Quadratorum Radices.	*Quadrati partibus auctis.*
$\square: 8\times3\times37.$	$127\times13\times3\times7\times67.$
$\square: 2\times19\times29.$	$7\times3\times127\times13\times67.$
Similiter.	
$\square: 3\times4\times11\times19\times37.$	$13\times31\times7\times19\times3\times127\times3\times7\times67$
$\square: 7\times8\times29\times67.$	$3\times19\times127\times13\times67\times3\times7\times7\times31.$

Sin

Sin queratur adhuc Freniclus, quod non ſint bini inter ſe primi, quod tamen quid ad rem præſentem faciat, non video, ſaltem cum non ſint expoſitorum 16 & 25 æquimultipli, quos credo, ſolos, excluſos vellet,) en duos alios, inter ſe primos.

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{R}: 2\times3\times5\times37. \\ \mathcal{R}: 29\times67. \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} 7\times13\times31\times3\times7\times67. \\ 13\times67\times3\times7\times7\times31. \end{array}$$

Similiter & hos duos, primos item inter ſe.

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{R}: 3\times5\times11\times19\times37. \\ \mathcal{R}: 7\times8\times29\times67. \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} 13\times31\times7\times19\times3\times127\times3\times7\times67. \\ 3\times19\times127\times13\times67\times3\times7\times7\times31. \end{array}$$

Sin præter hoſce (atque horum multiplos ut dictum eſt,) plures quis deſideret, eadem fere methodo quærat licet (mutatis mutandis) qua in exquirendo cubo, qui partibus ſuis aliquotis additus quadratum efficiat, uſi fuimus. Atque hæc quidem ſi quando forte viderit Freniclus, acquieſcet (credo) & in poſterum mitius judicabit, (nec ſua ſibi tam putabit propria, quin eo poſſint alii pervenire:) uti & jam, ni fallor, Fermatius acquieſcit.

Duos autem quod ſpectat viros Nobiliſſimos, Fermatium & Freniclum, quibuſcum hactenus egimus, (& quorum utrumq; ſua forſan de nobis expectatio fefellit;) diſpari nonnihil genio (quantum ex literis conjicio) videntur conſtituti. (Dabis veniam utique, ſi pro qua Tu ſoles indulgentia favere, libere apud te mentem eloquar.) Freniclum credo, Arithmeticis magis deditum, & quæſtiones particulares ſectantem, (quæ ad Æquationem univerſalē, & caſus omnes reſpicientē, vix aut ne vix reducantur) ſpeciatim quæ partes aliquotas ſpectant: (unde & Geometrica noſtra omnia intacta præterit:) Fermatium, Geometricis non minus exercitatum, & Canones generales, ſive univerſalia Theoremata inquirentem; (& qui fortaſſe virtutem in adverſario lubentius ſit agniturus:) Et quidem gravitatem Hiſpanicam, quibus eſt vicinior, magis fortaſſe ſapit alter; Gallorum alter alacritatem: Acutos ambos & ſummos viros ſubens agnoſco. Nec tamen eſſe credo, (quicquid de me ſtatuatur) cur Gentem noſtram habeant deſpicatui;

ſpicatui; niſi quod minus fortaſſe ſimus jactabundi.

Vides, Vir Inſigniſſime, quanta tecum utar libertate, favore nixus Tuo, qui hanc permittat. Ne tamen libertatem videar in licentiam nimiam deflectere, ulterius importunus eſſe deſino, ubi me fuero profeſſus,

Oxonii, Mart. 19. 1653. *Stilo Angliæ.*

Illuſtriſſime Domine,

Humillime Tibi obſequentiſſimum, atque obſervantiſſimum Tui,

Joh. VVallis.

EPISTOLA XXX.

D. Vicecomitis Brouncker *ad* D. Joh. Wallis.

Sir,

THeſe papers being ſent me by Doctor *Scarbrough*, a day ſince, are herewith preſented to you. I imagine (upon the ſight of them) that Mr. *Frenicle* hath by him a large Table of Numbers (Squares, Cubes, &c.) with their aliquot parts in Primes; which makes him ready for any ſuch ſolution, by almoſt a bare inſpection, according to the method you lately intimated, for the ſolution of theſe Problems, which is univerſally applicable to all of the like nature. My ſervice to your Lady, and let this confirm unto you, my being

6 *April* 1658.

Sir,
Your moſt faithfull friend, and humble ſervant

BROUNCKER

EPISTOLA XXXI.

D. de Frenicle *ad* D. Kenelmum Digby.

ADſunt quas à me poſtulâſti, Eques Honoratiſſime, Problematis Clariſſimi Viri D. Wallifii ſolutiones quædam, non omnes quidem quæ mihi occurrerunt, cum tam multæ ſint ut eas ſcribere non valuerim, cum enim ad paucos numeros unde ipſas decerperem, brevitatis cauſa, reducendum eſſe calculum æquum eſſe duxerim, nihilominus ex his paucis, tot & tam varias exurgere comperi, ut terminum quendam eis ponerē coactus fuerim, quandoquidem ex prioribus ſolutionibus novas ſemper & varias ſine modo provenire animadverti; unde factum eſt, ut ipſas ordine à me propoſito exhibere tam cito non potuerim, quod Deo juvante quamprimum fiet. Tale autem erat Problema; *Invenire duos quadratos quorum ſinguli juncti cunctis ſuis partibus aliquotis conficiant eandem ſummam.* Et exemplum præbet quadratorum 16 & 25, quorum ſinguli juncti ſuis partibus faciunt 31. Quæruntur alii ſimiles.

Quæruntur igitur bini tantum alii quadrati, & certe nullum negotium in hoc problemate inerit ſi multiplices quadrati admittantur. Attamen ipſe Wallifius eos recuſare non poterit: cum ad problema quoddam D. Fermat, circa numerum ex binis cubis compoſitum, qui in duos alios cubos reſolvi debeat; ut eſt 1729, qui numerus cum ex duobus cubis 1 & 1728 ſit conflatus, in duos tamen alios cubos 729 & 1000 reſolvitur; cum, inquam, ad ſolutionem hujus facillimi problematis multiplices tantum acceptorum numerorum tradiderit.

Hâc igitur regula facillime D. VVallifii problema ſolvetur. Ducantur quadrati 16 & 25 in quemlibet alium quadratum imparem, per 5 non diviſibilem, & exurgent alii duo quadrati quæſtioni ſatisfacientes. Sic quadrati numerorum 12 & 15; 28 & 35; 36, 45: 44, 55: 52, 65, &c. rem præſtant. Si enim quilibet quadratorum 144 & 225,

partibus

partibus ſuis jungantur, conficient ſummam 403. Quadrati 784 & 1225, faciunt 1767. Quadrati 1296 & 2025, faciunt ſinguli cum ſuis partibus 3751. Et ſic de aliis. Sed hæc ſolutio eſt indigna Mathematico, nec talis eſt quæ proponi debeat, ſi hoc ſenſu accipiatur. Exiſtimandum eſt igitur D. VVallisium aliud in ſuo problemate intendiſſe, & aliam ſolutionem expectaſſe, cum huic acquieſcere non debeat. Proponatur igitur problema ut ſequitur. Invenire duos quadratos inter ſe primos, quorum ſinguli juncti ſuis partibus faciant eandem ſummam.

Sequuntur latera quadratorum, qui quæſitum præſtant. Si enim quadratus numeri 326 jungatur ſuis partibus, efficiet ſummam 187131: ſimiliter & quadratus numeri 407 junctus ſuis partibus dabit eandem ſummam 187131. Hæc vero ſumma datur in partibus, poſt ſex priores quadratorum copulationes.

Latera Quadratorum.	Summa.
326 407	187131.
627 749	658749.
1510 1809	4980801.
13066 14001	307464339.
10686 17531	314858271.
146311 147823	24126447513.
361232 497173	3, 31, 37, 49, 73, 127, 169.

111408 183169	3, 19, 31, 37, 49, 73, 169.
343952 507419	9, 49, 67, 73, 361, 367.
724152 1193941	7, 9, 19, 31, 37, 61, 127, 169.
&c.	&c.

[*Sequebantur hic aliæ binorum copulationes* 27.]

Plures alii bini quadrati reperiri possent, sed ad alia properandum est. Non solum enim bini quadrati partibus suis junCti eandem summam conficere valent; sed etiam trini, quatrini, quini, seni, &c. idem præstare possunt quadrati & inter se primi. Trini autem, quatrini, &c. quadrati dicuntur inter se primi quando nullus numerus hos omnes dimetiri potest. Sic quadrati 9, 16, 225, 324, hic dicuntur inter se primi, quia nulla est ipsis quatuor communis mensura, quanquam tres ex istis habeant numerum 9 communem mensuram.

Trini quadrati.

Latera Quadr.	Summa.
245828 294867 307285	133151753133.
&c.	&c.

[*Sequebantur aliæ ternorum copulationes* 27.]

Supersunt alii quamplures trini, quadrati quæstionem solventes jam quidem inventi, sed ob temporis inopiam nondum ordinati, ut Tibi, Vir Nobilissime, præberi possint; ut etiam quatrini, quini, seni, &c. quos quum parati fuerint cum prædictis trinis accipies; interim ut ex cunctis quos pollicitus sum unum saltem aut alterum exemplum habeas, hic quidem sunt appositi, reliquos expectaturus.

Qua-

Quatrini quadrati.

Lat. Quadr.	Summa.
2996.	
2508.	
3135.	20421219.
3745.	
&c.	&c.

[*Sequebantur tres aliæ quaternorum copulationes.*]

Quini quadrati.

Lat. Quadr.	Summæ partes.
139954381710.	
165476277890.	
167186334770.	13, 27, 31, 37, 61, 73, 127, 361, 367, 1093, 2401.
198242772651.	
200291443443.	

Seni Quadrati.

Lat. Quadr.	Summæ partes.
79588991130.	
82718076012.	
95075206310.	19, 27, 37, 61, 67. 127, 499, 961, 2197, 2401.
98813140244.	
103397595015.	
123516425305.	

Sequuntur alii quadrati tam bini quam trini, &c.

Sequebantur hic Quadratorum copulationes plures. Nempe Binorum, 6. *Ternorum,* 52. *Quaternorum,* 20. *Quinorum,* 3. *Senorum,* 5. *Tum Binorum,* 5. *Ternorum,* 5. *Quaternorum,* 7. *Quinorum,* 3. *Senorum,* 6. *Septenorum,* 4. *Octonorum,* 1. *Novenorum,* 1. *Iterumque Quinorum,* 1. *Senorum,* 3. *Septenorum,* 2. *Octonorum,* 2. *Novenorum,* 3. *Denorum,* 2. *Undenorum,* 1. *Duodenorum,* 2, *Tredenorum,* 2.

Quatuor-

Quatuordenorum, 1. *Quindenorum*, 1. *Novendenorum*, 1. *Quibus recenſendis ſingulis ſuperſedendum duxi, ne plura folia numeris implerem: Numerare tamen viſum eſt, ne Authori videar injurius.*]

EPISTOLA XXXII.

D. *Joh. Wallis* ad D. Vicecomitem *Brouncker*.

Illuſtriſſime Domine,

Accepi præteritâ ſeptimanâ, favore tuo tranſmiſſas, quæſtionis a me dudum propoſitæ, (de duobus quadratis qui partibus ſuis aliquotis additi eandem efficiant ſummam,) ſolutiones Frenicleas. Quibus percipio Nobiliſſimum Virum tum quæſtionem illam ſolviſſe, tum & plaris multo feciſſe quam facturus ipſe fuerim.

Solutio ſua prima, eadem ipſa eſt cum prima mearum; quippe *Quadratus impar per 5 non diviſibilis*, tantundem eſt atq; *quadratus qui ſit utriſque 16 & 25 numerus primus*.

Solutiones reliquas, ex eodem plane fonte oriundas arbitror, atq; eadem plane methodo inventas (certe vix meliori,) cum mearum reliquis.

Quod autem tam numeroſæ fuerint, non omnino mirandum erit modo tantum huic negotio laboris impendere non dedignetur. Cum enim præſto habeat, ni fallor, (quodq; tu etiam judicas,) tabellam ſatis amplam quæ quadratos, cubos, (fortaſſis & alias poteſtates,) numerorum primorum (ad uſq; forſan 500 vel etiam ultra) partibus ſuis auctos, in partibus exhibeat; facile erit inde ſolutiones aliquot, modo a me nuper indicato, elicere quas quidem ubi aliquam multas nactus eſt, eaſdem varie componendo, commutando, commiſcendo complures alias efformare poſſe virum ſagaciſſimum, non dubitabit qui non ignorat quot mille modis ſeptem aut octo literæ tranſponi poſſint, vel totidem campanæ ordines immutare. Quicquid ſit, ego nullus dubito, quin myſterium illud aparuiſſe (quod a nobis factum eſt) unde & hæc & hujuſmodi alia infinita dependent

dependent problemata, res Mathematicis non minus grata ſit futura, quam, ſuppreſſâ methodo, iſtiuſmodi vel mille numeros exhibere.

Ut autem quæſtionem illam a me (non ſibi) propoſitam ſolvat Freniclus, neutiquam inexpectatum erat. Cum enim Fermatianas ille jamdudum ſolverat, non dubitandum erat quin & meam, ab eodem principio dependentem eadem facilitate ſoluturus eſſet.

At mallem interim, ut id ſaltem laboris omiſiſſet, quo quadratorum radices, in partibus proculdubio primũ inventas, continue multiplicando in juſtos numeros redegit: quippe tanto facilius numeros ab illo exhibitos licuiſſet, ſi viſum eſſet, examinare; quod jam non niſi retexendo id opus ſuum faciendum erit: quem quidem ego a me laborem vix impetrabo; nec enim tanti erit. Sed metuebat forſan ne ſi rem tam nude expoſuiſſet, methodum inde ſuam ediſcerem, quam mihi ſperaverat ignotam eſſe.

Quod autem ipſi viſum eſt quæſtionem a me propoſitam immutare, adjuncta limitatione, nempe, ut quadrati *exhibendi ſint inter ſe primi*, (ne ſcilicet, expoſitis 16 & 25 rem præſtantibus eorum multipli per quadratum quẽvis qui ſit utriſq; primus, magna facilitate exhibeantur,) quãquam ego limitationem illam plane non repudiam, attamen cùr ego illam non admodum neceſſariam exiſtimem duo faciunt. Primum, quod expoſita limitatio plures quam ad id opus eſſet quadratos excludat; cum certum ſit, etiam cognitis 16 & 25 rem præſtantibus, multos adhuc eſſe quadratos, etiam non inter ſe primos, qui nihilo facilius inveſtigentur quam ſi ignorentur illi, vel etiam alij inter ſe primi. Et quidem, vel ipſo judice, nihilo facilius exquirentur $8\times3\times37$, & $2\times19\times29$ vel etiam, $3\times4\times11\times19\times37$, & $7\times8\times29\times67$, a me exhibiti, utut inter ſe primi non ſint, quam ſi eſſent. Alterum eſt, quod quamvis Freniclo res facilis ſit; ſut qui noverit, *numerum compoſitum ex duobus pluribusve numeris inter ſe primis, partibus ſuis aliquotis auctum*, æqualem eſſe *compoſito ex numeris illis inter ſe primis, partibus ſuis auctis*, (quod præcipuum eſt in iſtiuſmodi quæſtionibus myſterium,) qui tamen id neſciverit; nihilo facilius aſſequetur numeros datorum æquimultiplices, ut negotio accommodos, quam alios inter ſe primos; qui autem illud ſciverit

ris, non multo difficilius methodum assequetur alios etiam inter se primos investigandi.

Quod deniq; non tantum binos exhibeat, sed & ternos, quaternos, quinos, &c. Sat novit vir Nobilissimus non novum illud esse negotium, (si laborem calculi excipias,) a quæstione ut a me proposita; cum eadem plane methodo exquirendi sint terni, quaterni, &c. vel etiam centeni, atq; bini; (& quidem inter paucos illos a me expositos, inveniat ternos quadratos rem præstantes; nempe $3\times4\times11\times19\times37$, $3\times5\times11\times19\times37$, $7\times8\times29\times67$; quorum singuli partibus suis aliquotis additi, summam efficiant $3\times3\times7\times7\times13\times19\times31\times67\times127$:) Uti nec novum esset, si quod de quadratis proposui, proponerem item de cubis, vel biquadratis &c; quodq; de summis æqualibus, id ipsum de summis in data ratione (possibili) constitutis fuisset propositum. Quamquam enim, in istiusmodi casibus, serius non raro calculus rem imperatam assequatur; ex eodem tamen principio solutiones dependent, eadem plane methodo investigandæ: quod probe novit Vir Acutissimus. Quod & de istiusmodi aliis quæstionibus infinitis dictum esto.

Unicum adhuc supereſt dicendum; Nempe me jam nuperrime ex Batavia literas accepisse a D. *Schotenio* ad me scriptas, quas & D. *Va* impertiendas judico. Quibus perlectis, in ea plane sum sententia, quod Methodus qua usus est D. Freniclus, ad quæstionem Fermatianam tertiam solvendam, (nempe, de quadrato, qui in datum non-quadratum ductus, factum exhibeat qui a numero quadrato unitate deficiat,) methodis hinc exhibitis, posteriori saltem, inferiorem esse. Tum quia video eum ad datum non-quadratum 109 hæsitasse, (quod & ex tractatu impresso liquet, ubi quadratum huic numero accommodum, a D. Fermat sibi transmissum ait;) tum etiam quia methodum illam, (uti videtur) quum D. Hugenius viderat, tam laboriosam deprehendit, ut illam aggredi reformidaverit; quum interim nostra tantæ facilitatis res sit ut vel brevi temporis spatio, numeros sat vastos potis sit exhibere. Sed quum methodum illam Frenicleam nondum vidimus, (visum utiq; ipsi est in tractatu suo impresso illam reticere,) nec aliunde quam ex conjecturis quicquam judicare possim, nihil ea de re audacter pronuncio. Literas

teras autem *Schotenianas* quod attinet, num D^ni V^a visum sit ut nostris imprimendis (quod & mihi videtur haud incommodum, & ipse desiderat) interserantur, a Te exspecto; facturus omnia, quam fieri potest, ex voto tuo; ut qui sim,

Oxonii Apr. 13. 1658.

Illustrissime Domine,
Obsequentissimus Tibi, Tuique observantissimus

Joh. Wallis.

EPISTOLA XXXIII.

D. Franc. Schooten *ad D.* Wallis.

Clarissime Vir,

EXemplarium partis primæ Operum tuorum Mathematicorum, (quorum alterum mihi, Hugenio alterum à Te destinatum fuit) quod mihi destinaveras, rectè à Domino Thrommio mihi traditum est, quare & maximas ago gratias. Dolet etiam Exercitationes meas tibi non fuisse traditas, quarum exemplar, jam tunc cum prodierant, Typographo dederam, ut illud unà cum plurium exemplariũ copia Londinum mitteret, ad— qui ipsum inde ad te meo nomine Oxoniam amandaret. Gaudeo plurimum eas Tibi non malè placuisse, ut & quæ de Ratiociniis in Aleæ ludo in fine à Nobilissimo Hugenio sunt adjecta: cum tuum super istis judicium præ mille aliis luculentum nobis sit testimonium, quod tam restituendæ quam promovendæ Mathematicæ uterque operam non male collocaverimus. Præ aliis arridet mihi mutuus consensus, quem subinde in tuis ac meis evolvendis animadvertere licet, ut inter alia liquet in iis, quæ de Progressionibus uterque protulit, haud secus ac si communicatis consiliis scripta forent.

Quæ de Fermatii quæstionibus innuis, superiori anno omnibus

bus Europæ Mathematicis ad ſolvendum propoſitis, quid nempe circa illas à me præſtitum ſit, paucis accipe. Miſit ſc. anno præterito die 26 Januarii Pariſiis ad Academiæ Lugd. Batavæ Matheſeos Profeſſores Vir Illuſtriſſimus D. Gulielmus Boreel, Confœderatarum Belgii provinciarum ad Chriſtianiſſimum Galliæ Regem Legatus, literas, quibus duæ includebantur quæſtiones numericæ hâc inſcriptione: *Problemata duo Mathematica tanquam indiſſolubilia, Gallis, Anglis, Hollandis, nec non cæteris Europæ Mathematicis propoſita, à Dno. de Fermat Regis Conſiliario in Toloſano Parlamento, Caſtris Pariſios ad D. Claudium Martinum Laurenderium Doctorem Medicum tranſmiſſa 3. Nonas Januar. 1657. accepta vero 12 Kal. Febr.*

Problema prius.

Invenire Cubum, qui additus omnibus ſuis partibus aliquotis conficiat quadratum: ut numerus 343 eſt cubus à latere 7. Omnes ejus partes aliquotæ ſunt 1. 7. 49. quæ adjunctæ ipſi 343 conficiunt numerum 400. qui eſt quadratus à latere 20. Quæritur alius Cubus ejuſdem naturæ.

Problema poſterius.

Quæritur etiam numerus Quadratus, qui additus omnibus ſuis partibus aliquotis conficiat numerum Cubum.

quas ubi D. Golius receperat die 7 Febr. ejuſdem anni, pridie ſc. quàm Rectoratus Magnifici munus deponeret, me coram poſt aperuit die 11 ejuſdem menſis, quibus tunc temporis ſequentia reſpondi, atque prout illa Dno Golio prius communicaveram, rectâ Pariſios die 17 Febr. ad memoratum D. Boreel una cum adjunctis literis tranſmiſi; at duobus à me ejuſdem argumenti adjunctis Problematis, Dno. Fermatio iterum proponendis.

Reſponſum ad quæſtiones à D. de Fermat, in Parlamento Toloſano Conſiliario Regio, totius Europæ Mathematicis ad ſolvendum propoſitas.

Ad ſolvendam primam Quæſtionem, *in qua Numerus Cubus eſt inveniendus, qui additus omnibus ſuis partibus aliquotis conficiat Quadratum*, quæro ab unitate 4, 7, 10, aut 13, pluresve numeros deinceps proportionales (augendo ſc. illorum numerum continuè

per

per 3) qui simul additi conficiant Quadratum numerum; eritq; ultimus proportionalium Cubus quæsitus. Pro secundo autem proportionalium sumo semper alium atque alium primum numerum, incipiendo ab omnium minimis.

Sic quoniam proportionales 1. 2. 4 8. 1. 3. 9. 27. 1. 5. 25. 125. additi faciunt numeros 15, 40, 156, qui quadrati non sunt: Hinc, prout pro secundis cujusque harum serierum assumpsi primos numeros 2, 3, & 5, assumo jam pro secundo primum numerum 7, habeoque proportionales 1. 7. 49. 343, qui additi faciunt 400, Quadratum numerum cujus latus est 20. Atque sic invenio 343 esse omnium minimum Cubum numerum, qui quæsito satisfacit, ac ipsissimus est, qui à Duo de Fermat est allatus. Quoniam autem assumendo semper alios atque alios quatuor proportionales, utendo ad hoc ordine omnibus primis numeris à 2 usque ad 97, alium nullum præter jam ostensum offendi, laborem illos ulterius explorandi subterfugi [*quandoquidem compendiosiorem viam eos certò inveniendi agnoscere haud potui*, dele. ☞

Eodem modo, cum utendo 7 proportionalibus 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 1. 3. 9. 27. 81. 243. 729, &c. summæ 127, 1093, &c. non sint Quadrati, nec id ulterius, ob laboris molestiam, in 7 proportionalibus inquirere animus fuerit, declinavi simul operam idem in 10, 13, 16, pluribusve proportionalibus experiri. Ita ut hinc judicare ausus sim, quod, licet hujusmodi numeri (ut sane confido) sint infiniti, non tamen quis eos ultra certam multitudinem, utputa 5 aut 6 numero, facilè sit inventurus, ex ingenti illorum à se invicem distantia.

Ratio autem eosdem numeros sic infallibiliter inventum iri D. de Fermat latere non poterit, ubi intelliget me ad prædictos proportionales investigandos uti hujusmodi terminis Analyticis a^3, a^6, a^9, a^{18}, &c. aut etiam ad inveniendos numeros, habentes 15, 27, 39, 48, 51, 63, 69, aut 75, &c. partes aliquotas, me præter illos, præcedenti modo notatos, uti his a^3b^3, a^6b^2, a^9b^2, a^6b^6, $a^{12}b^2$, $a^3b^3c^3$, vel $a^{15}b^2$, a^9b^6, aut $a^{18}b^3$, &c. quippe qui huic negotio, ut sc. Cubis numeris inveniendis inserviant, utiles esse possunt. Sed cum ad inveniendos quæsitos numeros hi termini non nisi operosiores vias eosdem quærendi significent, haud facilè crediderim, ut quis

illas ingressus eos felicius sit obtenturus. Cæterũ nihil hic addo, cum præter jam indicatos modos investigandi hosce numeros nulli existant, quibus ipsi certâ ratione inveniri queunt; nisi forte D. de Fermat*[*compendia nonnulla*] in faciendis adæquationibus (quæ certè mihi *[*nuntiquam succedere voluerunt*] excogitaverit, quæ molestiam hujus examinis non parum sublevent: quæ si communicaverit, rem sanè gratissimam facturus est.

* *Loco horum verborum scribantur sequentia. Vide ad notum.*

2 ☞

Similiter ad solvendam secundam Quæstionem, *in qua Numerus Quadratus quæritur, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat numerum Cubum*, quæro 3, 5, 7, 9, 11, aut 13, pluresve numeros ab unitate deinceps proportionales (augendo sc. illorum numerum continuè per 2) qui simul additi faciant Cubum, sumendo pro secundo numerum quempiam primum. Omnino ut per 1. *a*. *aa*. 1. *a*. *aa*. a^3, a^4. 1. *a*. *aa*, a^3. a^4. a^5. a^6. &c. indicatur. Si enim hæc summa Cubus numerus fuerit, erit ultimus proportionalium Quadratus quæsitus. Utpote utendo ad hoc *aa*, a^4, a^6, a^8, a^{10}, &c. ad inveniendos numeros, habentes 2, 4, 6, 8, 10, &c. partes aliquotas. Aut etiam præter hos utendo *aabb*, ad inveniendos numeros habentes 8 partes, aliquotas, aut a^4 *bb* ad 14 partes, aut a^6 *bb* ad 20 partes, aut a^4 b^4 ad 24 partes, aut *aabbcc* vel a^8 *bb* ad 26 partes, &c. Sed quoniam & hi posteriores termini non nisi difficiliores modos quærendi hosce quadratos numeros significent, vix credere ausim, quempiam utendo illis ad optatum finem felicius perventurum.

Atque cum hi omnes modi existant, quibus quæsitos numeros certò obtineri posse evidenter perspexi, modo quis ad hoc, laborem examinandi, ut supra, ordine omnes primos numeros (incipiendo ab omnium minimis) non defugiat, sperare volo hic à me Clarissimi Fermatii desiderio penitus fuisse satisfactum.

Dabam Lugd. Bat.
die 17 Febr.
Anno 1657.

Hæc ego
Fr. à Schooten, in Academia
Ludg. Bat. Math. Professor.

Sequuntur duo Problemata Dno. de Fermat rursus propoſita, ejuſdem argumenti.

Primum Problema.

Invenire duos Cubos numeros, qui ſimul additi conficiant Cubum. Vel, ſi eoſdem reperire non obtingat, oſtendere problema eſſe impoſſibile.

Secundum Problema.

Oſtendere, utrum *perfecti numeri aliâ ratione quàm ab Euclide traditur* prop. ult. lib. 9. Elem. hoc eſt, abſque progreſſione dupla, *ſint inveniendi nec ne.*

Atque hæc quidem, quæ tunc reſpondi atque viciſſim repoſui.

In his autem quæſtionibus enodandis id ſolummodo propoſitum habui, ut modum, quo ſolvendæ eſſent, Autori indicarem, quod ſane me feciſſe Tibi, Vir Perſpicaciſſime, facile erit cognoſcere, cum nullum dari numerum deprehendes, qui aliquam prædictarum conditionum (ut ex Sectione tertia mearum Exercitationum colligere licet) non ſubeat, aut per allatos modos inveniri non poſſit. Neque enim tanti ipſi numeri mihi viſi ſunt, quin ratio quâ iidem certò eſſent inveniendi Dno Fermatio ſufficeret. Atque hoc eſt, quod præſertim etiam ſpectavi in binis adjunctis Problematis, ut, ſi quæſiti à me numeri, non offenderentur, ſaltem oſtenderetur Primum ex illis Problematibus eſſe impoſſibile, & ſecundum aliâ nullâ ratione, quam ab Euclide oſtenſum eſt, ſolvi poſſe. Ad hæc vero omnia nil quicquam, quod ſciam, ab ipſo Fermatio mihi reſponſum eſt, aut certe nihil ad me pervenit; neque etiam ullatenus ipſum urgendum duxi, ne magnam videlicet gloriam ex ſolutione Problematis, quod nullius uſus fructuſve apparet, aucupari viderer. Ita ut neſciam utrum D. de Fermat mea receperit nec ne, & ſi receperit quale de iis judicium ferat. Fateor compendia, quæ ad operis ſublevamen haud parum profutura credidi, illo quidem tempore mihi in mentem non veniſſe:

niſſe: quocirca tunc ipſi Fermatio ſignificavi (cui illa dubio procul præ aliis conſtabant) ſi generalia quædam compendia circa hæc cognoſceret, rem gratam facturum eſſe, ſi nobis communicare illa dignaretur.

Poſtquam Fermatii quæſtiones ſuperiori modo ſolviſſem, viſum fuit illas etiam Clariſſimo Domino Huddenio communicare atque ſolvendas proponere, qui tunc temporis Ultrajecti morabatur, ac die 23 Febr. tale mihi ſuper eas reſponſum dedit.

"Quantum ad quæſtiones à D. Fermatio propoſitas, illarumque à te inventam ſolutionem, fateor illas quidem mihi non diſplicuiſſe, ſed non perinde rationem, quâ mihi perſuadere conaris, ut & ego earundem ſolutioni quærendæ operam darem: quandoquidem judicio meo, magis neceſſaria ac utilia minus neceſſariis ac utilibus anteferenda ſunt. Si enim aliquod mihi in excolenda Matheſi otium ſuperſit, confido id non tantum à me in longè utilioribus impendi poſſe, ſed & ſimul generalioribus ac jucundioribus, quæque ejuſdem cultori ampliorem laudem polliceri videntur. Quocirca cum id à me impetrare non potuerim, ut ſolutioni horum Problematum quærendæ incumberem; volui tamen nonnihil ſepoſitis cæteris meis ſtudiis tui ſolius causâ heſternum diem iis impendere, forte, ut, ſi tuum ad eas reſponſum nondum Pariſios amandaſſes, quæ à me ad ſublevamen operis inventa eſſent, tibi impertirem.

"Regula igitur quam ex multis ſelegi atque ad ſolutionem prioris quæſtionis adhiberem, *in qua cubus numerus eſt inveniendus, qui additus omnibus ſuis partibus aliquotis conficiat quadratum*, talis eſt: Sumatur quadratus (incipiendo ab omnium minimis) cujus duplum — 1 ſit numerus primus, à quo ablato 1, ſi reliquum multiplicetur per quadratum aſſumptum (ſeu, quod idem eſt, per majorem hujus primi numeri ſemiſſem) & productum adſcitâ unitate deveniat quadratus: erit prædictus primus numerus latus cubi quæſiti.

Exempli

Exempli gratiâ.

Radix	□	Prim. num. 2□—1	Prim. num. — 1 □, vel major semissis pro. numa	
2	4	7	6 per 4 dat 24, cui add. 1, sit 25. Ergo 7 est latus Cubus quæsit.	
3	9	17	16 per 9 dat 144, + 1	
4	16	31	30 per 16 dat 480, + 1	
5	25			
6	36	71	70 36 2520, + 1	
7	49	97	96 49 4704, + 1	
8	64	127	126 64 8064, + 1	
9	81			
10	100	199	198 100 19800, + 1	non efficiunt □.
11	121	241	240 121 29040, + 1	
12	144			
13	169	337	336 169 56784, + 1	
14	196			
15	225	449	448 225 100800, + 1	
16	256			
17	289	577	576 289 166464, + 1	
18	324	647	646 324 209304, + 1	
19	361			
20	400			
21	441	881	880 441 388080, + 1	
22	484	967	966 484 467544, + 1	
23	529			

"Quæ hic patent loca primos numeros non admittunt, ut "requiritur juxta regulam; sed, quod forsan miraberis, ipsi om-"nes divisionem per 7 vel 17 recipiunt. Porrò si bene computa-"vi, liquet hic in numero 1150, 1150, 1150, seu 1520875000 "unum tantum cubum reperiri, videlicet 343 (eorum nem-"pe, qui non præter tres partes aliquotas sinunt, cum pro iis so-"lis hæc regula sit accommodata): Siquidem primus nume-rus, quem deinceps inveniremus, major est quam 1150. Cubi vero 343 latus 7 per primum quadratum est inventum, atque

"hic

" hic cubus ipsissimus est ille, qui ab Autore fuit ostensus, quæsi-
" to satisfaciens.

" Cum igitur jam hæc tua verba perpendo : *Quoniam autem*
" *assumendo semper alios ai, alios quatuor proportionales, utendo adhoc*
" *ordine omnibus primis numeris à 2 usque ad 97, alium nullum præter*
" *jam ostensum offendi, laborem illos ulterius explorandi subterfugi,*
" *quandoquidem compendiosiorem viam eos certo inveniendi agnoscere*
" *haud potui*, nullus dubito quin hac via facilius quis ad quæsi-
" tum sit perventurus, quoniam usque ad 1151 circiter intra
" sesqui-horam perveni; & si quidem catalogus tuus primorum
" numerorum mihi ad manum fuisset, dimidio adhuc fer-
" mè labori parcere potuissem. Quocirca facile tibi erit, si
" operæ pretium ducas, ulterius id in majoribus numeris ex-
" periri.

" Quo pacto autem hanc regulam seu canonem invenerim, se-
" quens calculus indicabit.

" Esto a^3 cubus numerus inveniendus, & $a \gtrless$ alicui primo
" numero.

" Hujus autem cubi partes aliquotæ sunt 1. a. aa, quæ additæ
" ipsi a^3 simul faciunt $1 + a + aa + a^3$. Id quod requiritur æ-
" quale quadrato.

" Ponatur itaque $1 + a + aa + a^3 \gtrless \overline{1 + a \text{ in } b}$ } mult.
$\overline{1 + a \text{ in } b}$ }

" div. utrinque per $1 + a$. $1 + aa \gtrless \overline{1 + a \text{ in } bb}$

Et fit $\frac{1 + aa}{1 + a} \gtrless bb$, seu $a - 1 + \frac{2}{a+1} \gtrless bb$.

" Quoniam autem a primus numerus esse debet, poterit
" $\frac{2}{a+1}$ dividi per 2. Quæ quidem fractio si ad integrum nu-
" merum $a - 1$ addatur non potest producere quadratum, ut
" requiritur, nisi & simul ejus denominator $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$ sit nume-
rus

"rus quadratus. Unde ſat magna facilitas elici poteſt, quan-
"doquidem primo loco inveſtigare ſufficit $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} \propto \square$, id eſt,
"$a + 1 \propto 2\square$, ſeu $a \propto 2\square - 1$. Ita ut hinc appareat cur in
"Canone dicam, *Sumatur quadratus, cujus duplum — 1 ſit numerus*
"*primus*; quippe eum qui hac caret proprietate prætermitto,
"utpote propoſito non inſervientem. Hac inventione quærendi
"laborem plurimum ſublevare licet, non tantum in a^2, verum
"etiam in cæteris.

"Atque his, vir Amiciſſime, in tantum tempus meum
"eſt præterlapſum, ut vix de alterius Problematis ſolutio-
"ne tibi communicatu dignum quid habuerim, ut nec de aliis
"viis hujuſmodi cubos inveſtigandi quam per a^6, a^9, a^{12}, &c.
"aut $a^1 b^2$, $a^6 b^2$, &c quarum partes aliquotæ non ſunt pro-
"portionales, ut in prioribus.

Hinc cum literę meæ jam tunc Pariſios eſſent amandatæ, atque ex ſuperioribus didiciſſem intra 1 & 1520875000 nullum reperiri cubum præter jam oſtenſum 343, etſi quis ad eos inveſtigandos jam faciliori via (ipſius ſc. a^2) fuiſſet uſus; & cæteras ipſarum a^6, a^9, &c. aut $a^1 b^2$, $a^6 b^2$, &c. non niſi difficiliores eſſe exiſtimandas, jure ab ulteriori horum numerorum diſquiſitione ego juxta & D. Golius (qui & horum Problematum ſolutionem ſibi inveſtigandam propoſuerat) abſtinendum eſſe duximus, bonaſque horas Mathematicas alibi potius eſſe collocandas.

Paulo poſt illud tempus, 9 ſc. die Martii, Hagâ accepi literas à Nobiliſſimo Hugenio, quibus includebantur aliæ à Dno Mylon J. Cto Pariſiis ad me datæ, una cum adjuncta pagella, quam repetiit Hugenius, hæc ad me ſcribens: *Ecce tibi à Mylonio noſtro literas, itemque pagellam quam me quoq; inſpicere voluit, quam, ubi commodum erit, remittere te mihi velim, propter quæſita* D. de Fermat. Quæ quidem pagella hæc continebat.

Propoſuit D. de Fermat omnibus Arithmeticis per Dominum Digby.

Invenire Cubum qui additus omnibus ſuis partibus aliquotis conficiat quadratum.

Ut numerus 343 eſt Cubus à latere 7. omnes ejus partes aliquotæ ſunt 1, 7, 49, quæ adjunctæ ipſi 343, conficiunt numerum

400. Qui est quadratus à latere 20.

Quæritur alius Cubus ejusdem naturæ.

Quæritur etiam numerus Quadratus, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat numerum Cubum.

Monſ. de Frenicle a resolu ces quæstions, & Mr. Martin qui en a les solutions les fait imprimer, à ce qu' on m'a dit.

Depuis peu Mr. de Fermat a escrit cecy a Mr. de Frenicle.

'Tout nombre non quarrè est de telle nature, qu'on peut 'trouver infinis quarrès, par lesquels si vous multipliez le nom-'bre donnè, & si vous adjoustez l'unitè au produit vienne un 'quarrè.

'Exemple. 3 est un nombre non quarrè, lequel multiplie par '1, qui est quarrè, fait 3, & en prenant l'unitè fait 4. qui est 'quarrè.

'Le mesme 3 multipliè par 16, qui est quarrè, fait 48. & en 'prenant l'unitè fait 49, qui est quarre.

'Il y en a infinis, qui multipliant 3, & prenant l'unite, font 'pareillement un nombre quarre.

'Je vous demande une reigle generale, pour, estant donnè 'un nombre non quarré, trouver des quarrés, qui multipliés par 'le dit nombre donnè en adjoustant l'unite fassent des nom-'bres quarrés.

'Quel est, par exemple, le plus petit quarré, qui multipliant '61, en prenant l'unite fasse un quarré.

'Item, quel est le plus petit quarré, qui multipliant 109, & 'prenant l'unité fasse un quarré.

'Si vous ne m'envoyez pas la solution generale, envoyez moy 'la particuliere de ces deux nombres, que j'ay choisis des plus 'petits, pour ne vous donner pas trop de peine.

'Apres que j'auray receu vostre responce je vous propose-'ray quelque autre chose. Il paroist sans le dire que ma pro-'position n'est que pour trouver des nombres entiers, qui satis-'fassent à la question, car en cas de fractions le moindre Arith-'meticien en viendroit à bout.

A quoy M. de Frenicle a envoyé l'ordre qu'il tient pour resoudre ces questions, dont le calcul est extremement long.

Ubi jam Hugenio & Mylonio super hæc rescripseram, atque D. Fre-

D. Frenicliũm meo nomine per Mylonium curaveram officiosissime salutari, misi simul pag. 426. tunc impressam mearum Exercitationum, è qua pateret quam ipsius fuerim studiosus; adeò quidem ut in hisce quæstionibus, in quibus propter alia studia minus temporis impenderam, ipsi libenter palmam me concedere, testarer. Quibus cum respondisset Mylonius die 12 Aprilis, misit mihi postmodum ejus responsum Hagâ Hugenius die 21 ejusdem mensis, in quo inter alia hæc regessit.

'I' envoye à Monſ. de Zuylechem les penſées de Monſ. Frenicle, touchant les Propoſitions Numeriques de Monſ. de Fermat & vos ſolutions, & le prie de vous en faire part. Dictæ autem hæ Freniclii cogitationes erant tales.

'Monſ. Frenicle trouve que c'eſt plutoſt fait, d'examiner tous les Cubes de ſuite, pour voir ceux qui ſatisfont; qui eſt la queſtion propoſée par Monſ. de Fermat, que de ſervir de la methode de M. Schooten. Neantmoins pour ſ'en ſervir il donne ce Theoreme.

'Il n'y a aucune puiſſance dont la racine ſoit un nombre premier, & l'expoſant un nombre impairement pair, qui puiſſe avoir un quarré pour la ſomme de ſes parties. Donc M. Schooten doit exclure ces nombres de ſa Methode.

'Il en peut encor exclure beaucoup d'autres, ſcavoir ceux ou les proportionelles ſont en multitude impaire, car leur ſomme ne ſera point un quarré, & n'a pas beſoin d'eſtre examinée, ſi le nombre de la proportion n'eſt pareil a 79, 199, & autres dont il ſe trouve fort peu, ſe trouvant pluſieurs milliers de nombres ou il n'y en a que 5 ou 6.

'D'avantage le ſecond nombre de la proportion continuelle, doit eſtre un de ceux de cette progreſſion, & entre ceux la il n'y aura que ceux qui auront ces deux proprietez.

'La 1. Que ce ſoit un nombre premier.

'La 2. Qu'il ſoit moindre de l'unité qu'un double quarré.

'Or par les letters finales & autres proprietés des doubles quarrés on peut voir aiſement qu'il n'y en a aucune qui puiſſe ſatisfaire outre 7, ſi le cube n'a plus de 60 lettres. Il ſe trove

1.	*En cette progreſſion*
7. a	*ſix fois* a — 1 *æquatur* b.
41. b	6 b — a *æquatur* c.
239. c	6 c — b *æquatur* d,
1393. d	*&c.*
8119.	
47321.	

Les nombres de la precedente progreſſion ſe trouvent encore autrement par la ſeule addition, comme en celle, qui ſuit, en laquelle il n'y aura que ceux de la colomne h, *qui ſont vis à vis des impairs de la colomne* g, *qui ſoient utiles.*

g	h
1	1
2	3
5	7
12	17
29	41
70	99
169	239
408	577
985	1393
2378	3363
5741	8119

La conſtruction de cette table eſt aiſée par addition.

Car. 1 + 1 *font* 2 *en* g
2 + 1 *font* 3 *en* h
3 + 2 *font* 5 *en* g
5 + 2 *font* 7 *en* h
7 + 5 *font* 12 *en* g
12 + 5 *font* 17 *en* h
&c.

'par ces deux proprietés qu'il n'y a q; deux 'nombres a examiner 'ſ'ils ſont doubles 'quarrés pour aller 'juſques a la racine de 'ce cube de 60 lettres. 'Et cet examé eſt d'a'jouſter 1, & prendre la 'racine quarrée de la 'moitié, car les autres 'ou ſont compoſez ou 'leurs finales mõſtrent 'qu'ils ne ſont pas dou'bles quarrés — 1.

Mounſieur Frenicle propoſe ce Probleme.

'Trouver un nombre 'triangulaire, dont le 'ſextuple + 1 ſoit nombre cube.

'Ie eſcris de l'autre part ce que j'ay pu tirer ſur le champ 'de Monſ. de Frenicle, touchant les Propoſitions Numeriques 'de Monſ. de Fermat, je vous ſupplie d'en faire part a Monſ. 'Schooten, &c.

'Voicy la ſolution de Monſ. de Frenicle pour les 'nombres ſuivants.

Pour	13	C'eſt le quarré de 649
pour	19	c'eſt le quarré de 170
	17 —	q. de 33
	21 —	q. de 55
	23 —	q. de 24
	29 —	qq. de 99

31 ——— q. de 1520
33 ——— q. de
37 ——— q. de 73
41 ——— q. de 2049
43 ——— q. de 3482
47 ——— q. de 48
53 ——— q. de 66249
59 ——— q. de 530
61 ——— q. de 1766319049. 'Lequel quarré eſtant

pour 109 il n'y en a point au deſſous de 25 lettres. 'diminué de 1 'donne le quarré

pour 127 — c'eſt le q. de 4730624. 'de 226153980. 'Or le quarré

'qui ſatisfait a 61 a 19 lettres, quoy qu'il n'eſtoit beſoin pour 'le trouver par la Methode de Monſ. Frenicle que de 5418. '11418. 23718 & 29718.

Super hæc verò Hugenius ſequentia adjecit.

'Quæ ex mente D. Frenicle de quæſtione à Fermatio propo-'ſita in meis literis Mylonius adſcripſit examinanda tibi relin-'quo. Magna quædam compendia in inveniendis cubicis iſtis 'numeris videtur adferre, quantaque fortaſſe non putaras in-'veniri poſſe. Sed quibus rationibus nitatur inquirere operæ 'pretium eſt. Alteram quæſtionem quam Fermatius propoſue-'rat de inveniendo quadrato, qui in datum numerum ductus 'adſumpta ad productum unitate faciat quadratum, ego ſolve-'ram, canone quodam ad hoc tradito. Atque exiſtimo eodem 'uſum eſſe Freniclum ad inveniendos numeros, quos mihi Mylo-'nius mittit, ſed immenſi fuit laboris, quemque ego nequaquam 'ſuſcipere vellem.

Aliquanto poſt, die nempe 18 Maii, Mylonius hujuſmodi ad me dedit literas.

'*Monſieur*,

'I'ay fait voir à Monſ. de Frenicle voſtre petit papir impri-'mé dont il vous remercie. Un de ſes amis veut icy faire im-'primer le deffi de Monſ de Fermat & la ſolution dudit Sr. de 'Frenicle. Il y pretend joindre la voſtre avec les abregez, ex-'cluſions, & Theoremes de ſon ami. I'ay prié que l'on ne le fiſt

pas

'pas ſans ſçavoir voſtre volonté, prenez donc la peine de me 'mander par la voye de Monſ. de Zuylechem (puis qu'il a 'cette bonté) ſi vous trouverez bon d'eſtre nommé, ou non; 'ou ſi vous ne deſirez pas que voſtre ſolution ſoit imprimée. 'Ie taſcheray de faire ſuivre en cela voſtre intention, e-'ſtant, &c.

Subtus ſequentia habebantur.

'Monſ. de Frenicle vous envoye ces Theoremes ſur voſtre 'deuxieſme queſtion.

1.

'Pour les nombres pairs parfaits il n'y en a aucun que ceux, 'qui ſe trouvent par la Methode donnée par Euclide.

2.

'Pour les impairs, ſ'il y en a aucun, il doit eſtre multiple d'un 'quarré par un numbre premier pairement pair plus 1.

Theoreme.

'Il n'y a aucun quarré, qui multiplié par 19 ſurpaſſe de 'l'unité un quarré multiple par 7.

His ſequentes literas reposui.

'Monſieur,

'Puiſque vous avez eu la bonté de me mander, qu'un des amis 'de Monſ. Frenicle veut faire imprimer le defi de Monſ. de Fer-'mat & la ſolution dudit Sr. de Frenicle, & qu'il pretend d'y 'joindre auſſy la mienne avec ſes abregez, excluſions, & Theo-'remes, que Monſ. de Frenicle à inventé pour la racourcir; je 'n'ay pas voulu manquer de vous en remercier & de vous eſcrire, 'que tout ce qu'on en fera me ſera agreeable, ſoit qu'on l'im-'prime ou non. Car n'ayant employé gueres de temps pour la 'chercher, & remarquant qu'il eut fallu faire grande operation 'pour trouver ces nombres requis; je me ſuis contenté d'y en-'ſeigner ſeulement les chemins, par leſquels je voyois claire-'ment que les meſmes nombres, ſ'ils y avoient pluſieurs tels, ſe 'deuſſent trouver infalliblement, en cas qu'on vouluſt prendre 'la peine d'examiner generalement de ſuitte tous les nombres 'qui y pourroyent aucunement ſervir, ſans penſer particuliere-'ment quels nombres en fuſſent exempts, de meſme comme a

fait,

'fait Monſ. de Frenicle. De ſorte que ma Methode n' eſtant 'que Analytique, c'eſt à dire, expliquant comment on peut par 'le moyen de l' Algebre decouvrir les chemins, par leſquels ces 'nombres peuvent eſtre cherches, je ſerois d' avis, que, ſi on la 'veut faire imprimer, l' on y adjouſtaſt ces mots: *Ratio Ana-'lytica inveſtigandi hoſce numeros, inventa à Franciſco à Schooten*, ou 'bien, *Sequitur modus inveſtigandi hoſce numeros per Algebram, ſicut 'eum adinvenit Fr. à Schooten*. Ce qui la feroit plus recommen-'dable, ſeroit, d'y adjouſter de plus les abbregez, excluſions, '& Theoremes de Monſ. de Frenicle, affin que cela ne ſemble 'pas eſtre trouvé pour rien, mais y ſerve pour embelliſſement & 'plus grande perfection de cette matiere. Ie vous en laiſſe tout 'le pouvoir. Dans ma ſolution je voudrois bien, que ces 'mots en fuſſent effaces: *quandoquidem compendioſiorem viam eos 'certo inveniendi agnoſcere haud potui*. Et au lieu de ces mots: '*niſi forte D. de Fermat compendia nonnulla in faciendis adæquationi-'bus*, &c. j aymerois plutoſt ceux cy: *Niſi fortè D. de Fermat ge-'neralia quædam compendia in faciendis adæquationibus (quæ certè mihi 'nequaquam occurrerunt) excogitaverit*, &c. En finiſſant je de-'meure, &c.

Vide ſupra. ☞

☞ 2

De Leyde ce
29 de May,
1657.

Quibus ita ſe habentibus, in lucem tandem exiit tractatus hoc titulo: *Solutio duorum Problematum*, &c. quem eundem opinor cum illo à Te mihi in tuis indicato; de quo igitur par exemplarium curâ ſupra memorati Dni Legati Pariſiis die 26 Octobris ad nos tranſmiſſum eſt, alterum mihi, alterum Hugenio deſtinatum. Hunc ubi inſpexi, miratus ſum Autoris faſtum, cum in ipſo exordio ad D. Digby in hunc modum ſeſe efferre non erubuerit.

En tibi vir Illuſtriſſime,

Lutetia præbet quam neque Angli tui, neque Belgæ uſque modo præſtare potuerunt Problematum ſolutionem; geſtit Gallia Celtica palmam Narbonenſi præripere, &c. aliaque paſſim his ſimilia. quaſi vero Reipub-

licæ

licæ interfit hoſce numeros noſſe, & unuſquiſque hanc ſolutionem tanti facere teneatur, ut nec habeat in quo tempus utilius collocet. Ubi titulum intuebar, non potui non omnino indigne ferre, tractatus hujus Autorem in ſolutionem meam inquiſitionem aliquam conſcribere: ſiquidem *Inquiſitionem* nullam è Gallia unquam expectaveram, ac etiam autorem cordatiorem putabam, quam ut in eum, qui nullam ipſi, quod ſciam, offenſam dederat (ſed contra ſe illius ſtudioſiſſimum oſtenderat) circa rem adeo indifferentem parvique momenti tale quid moliretur vel fieri pateretur. Paulò poſt quam tractatus hic ad manus meas pervenerat, à Cl. Hugenio Hagâ literas recepi, cui, ut ſupra dictum fuit, alterum illius exemplar Pariſiis tranſmiſſum fuerat, quibus inter alia hæc ad me ſcripſit: *Problemata Frenicli non dubito ad te quoque ab Autore miſſa eſſe. Quæ cum aſpicio, demiror ſane diverſa hominum ſtudia.* Quod autem Autor in eo deinde innuit pleroſque Mathematicos tam in Anglia quam in Batavia horum Problematum ſolutioni operam dare, certè quantum ad Batavos, vix novi quempiam, qui operæ pretium duxerit ea aggredi; quin imò ex verſatioribus, quibus illa propoſueram, ſicut nullum eorum uſum aut fructum agnoſcebant, etiam nullum offendi, qui gloriam inde reportandam magni fecerit, adeoque ſolutionis inveſtigandæ laborem ſubire voluerit.

Cum itaque, Vir Præſtantiſſime, rogas, quam candide mecum ea in re actum fuerit, opinor id Tibi jam ex ſuperioribus facile eſſe colligere; quæ ideo prolixius quam forte res ipſa exigere videtur exponere Tibi viſum fuit: præſertim cum ſolutiones tuas & literas, quæ de hoc negotio tecum intercesſêre (ſicut ex tuis intelligo) typis mandare decreveris. Exiſtimo enim & hæc, vel aliqua certè ex his, ejuſmodi eſſe quæ ad propoſitum tuum ac narrationem faciant. Cui propterea ſi inſerenda Tibi videbuntur, facies id quidem me haudquaquam invito.

Quæ de Saturni Luna ac facie animadverſiſti, Hugenio communicare operæ pretium duxi, è quibus diligens atque eximium tuum in his rebus ſtudium agnoſcat, quibus ipſe quoque, ut opinor, nunc ſedulo intentus eſt. Sed

ne

ne nimium diu Te detineam, finem jam hisce impono, fausta omnia ac prosperâ Tibi apprecatus. Vale.

Dabam Lugd. Bat. die 18 *Martii. Anno* 1658. *St. Greg.*

Tui amantissimus pariter, atq; observantissimus,

Fr. à Schooten.

Gratulor, ea, quæ de Pappi textu ex Cod. Græcis MSS notasti, conjecturis meis ad unguem respondere. Hæc enim si ante sciviſſem, operam dediſſem ut genuinus hic Pappi sensus una fuiſſet impressus. Quod nunc in proximam editionem, si forte illa aliquando videbitur iteranda, reservandum est. Interim pro his gratias Tibi habeo, atque Deo omnium largitori ex animo te comendo. Iterum vale.

EPISTOLA XXXIV.

D. Vicecom. Brouncker *ad D.* Joh. Wallis. *cui includebantur sequentes quatuor.*

SIR,

BEing in haste, I shall onely present you this inclosed as it came to my hands, and tell you, that having fully resolv'd, in his own sence, that Proposition which he seem'd to esteem as the more difficult, I looke not upon my selfe as any way obliged to endeavour the solution of those other which he sends upon a presumption that the former was beyond my reach. Otherwise I think those not so difficult, but that if I pleas'd, and had the leasure, he might be fully satisfied herein also, by

May 1. 1658.

Sir,

Your most faithfull humble servant.

BROUNCKER.

What is said concerning your selfe, I thinke merits not the least reply The Reader doubtless willbe fully satisfied with what hath been already said.

EPISTOLA XXXV.

D. Kenelmi Digby *ad D.* Vicecom. Brouncker.

My Lord,

I Received two daies since the Letter your Lordship hath been pleased to write me of the 13 *March*, together with two to me from Doctor *Wallis*, and one from him to your Lordship. I give you most humble and hearty thanks for yours, which I embrace with exceeding gladness, joy, and respect; in the first place, for your excessive civility and kindness to me; and in the next, for your noble and learned satisfying Mouns. *Freniclee* requisition. Now, neither he, nor Mouns. *Fermat*, will have any more to cavil at, either your Lordship or Dr. *Wallis*; unto whom I have written at large (considering my inability of writing much at present) and doe presume to beg your favour in conveying my Letter to him, which I leave open, that if you please you may cast your eye over it. In earnest (my Lord) I congratulate with my whole heart the happy Starrs you are born under, that in so great a birth and quality, furnish you also with those excellent parts of the mind, as the eminenest that make Study and Learning their taske, may justly envy you for. By my enclosed, your Lordship will see how lately I received Dr. *Wallis* his former Letters. When you see Doctor *F.* I pray you reproach him for his unseasonable caution in keeping them so long by him. If I were not quite wearied out (I am yet so weake) with writing my Letter to Dr. *Wallis*, your Lordship should not thus easily be delivered of my troubling you at this time; which for my mentioned reason, I must not now further enlarge, but humbly kissing your hands, I rest,

Paris, 4 May 1658.

My Lord,

Your most humble and most obedient servant,

KENELM. DIGBY.

EPISTOLA XXXVI.

D. Kenelmi Digby *ad D.* Joh. Wallis. *præcedenti inclusa.*

Most worthy and honoured Sir,

THe letter you did me the favour to write to me the 26. of *December* last, came not to my hands till very lately, together with one that you wrote about the same time to my Lord *Brounker*; who it seems delivered them to Dr. *F.* to send me, by reason that Mr. *White* was then out of Towne: And the Doctor (how ever it came to passe) kept it dead by him, till I hearing of it several moneths after, did write to him for it, and withall desired him to go to my Lord and accuse himself of his omission (thereby to disculpe me of any) and immediately to send it me. He thereupon remitted it to me by the next Post, and told me he had been with my Lord to take from me all blame of negligence or want of respect. I professe unto you as I do also to all men else, when the occasion presenteth it self, that I do much admire the great stock you have, which furnisheth you (as appeareth by your sudden replies) with such a strange abundance of matter, that in a nights space you deliver out more than would employ another man whole Months. St. *Hierome* is justly admired for dispatching in one night the Treatise he hath left us against *Jovinian*. But your numerical answers, are of a subject, and require a method of handling it, of a far more difficult strain than his was; for, that may be compared to a thrid that is currently and easily spun out of the flax that lyeth ready for it, and of it self slideth and presseth into the thrid by the facile labour of bare turning the wheele. But every stroke of your Pen in this occasion requireth a new hewing of a regular stone out of the whole Quarry, to compose the Arch you build; in the contexture of which, and in every least particel of it, there must be a most exquisite and strict exactnesse, even to an invidual. Therefore it justly deserveth admiration to

see with what ease, or rather sport you acquit your self of these Herculean labours. VVhich when I look upon under that notion, truly I am not a little troubled that I should have any share (though but meerly as a passive instrument) in drawing them upon you. But when I view them by other lights, & which indeed are the true ones (as namely, how little they cost you, and how much the world will be the better for them, and how much they will redound to the honour of our Nation) then I confess I am glad of the opposition that hath been made you; not that I approve the tartness that sometimes accompanyeth disputes, and especially in Mathematical ones (where demonstration onely is considered) the parties should attend onely to the plain matter in hand. But the course and stile of this country furnisheth them with an excuse, where disputants use to be very tart, or rather froward (according to my sence) with one another: And if you were not a stranger, and one that in effect they have great value for, they would have been more familiar with you; for they account all that they say in this kinde, but a fair and usual familiarity; not at all injurious or offending. Monsieur *Fermat* did send me a Letter some time agone, in which he reflected upon some points in some former Papers of yours; the communicating whereof to you, he referred to my discretion: And as long as that liberty remained in me, I did not send you a coppy of it; but now by the last Post he wished me to communicate it to you; and therefore I doe herewith send you a transcript of it. Certainly you have the satisfaction to have the two greatest men in *France* (by the concession of all the eminentest) to deal withall. And I doubt not but your last Letters of the 4. and 15. of *March* (which I received but this morning; together with one from you at the same time to my Lord *Brouncker*) will make them and all the world give as large and as full a deference to you. For although I had time, since receiving them, but to run them greedily over, whereas such peeces ought to be seriously and leisurely considered (especially by so weak a gamester as I am at this play) yet I see enough of the redundant light in them to reverence, not a rising, but a noon-day Sun in its vertical point and highest Zenith. I am confident that the last Papers

will admit no cavils againſt them; And I ſhall out of hand impart them with great alacrity both to Monſ. *Fermat* and to Monſ. *Frenicle*; and what returns they ſhall make to me upon them, I will immediately tranſmit them unto you. Your precedent Letters that lay ſo long in Doctor *F*'s hands, I ſent by the laſt Poſt to Monſ. *Fermat*: I had, the day before, ſent them to Monſ. *Frenicle* (who is in this Town, but my ſickneſs would not allow me to goe my ſelf to him) and he ſent me word by my man, that hee would write ſomething to me upon occaſion thereof, which I ſhould have before the Poſt of *London*s departure to day. *I* will keep my Packet open till the laſt moment (which is not far off) that if any paper doe come from him, I may here incloſe it to you.

I give you therefore moſt humble and hearty thanks for the noble demonſtration you have been pleaſed to ſend me. In earneſt I am infinitely taken with it; and ſo I am ſure will all men be that ſhall ſee it; which I would requeſt your leave that I might make *publici juris* by committing it to the Preſs, but that in the Poſtſcript of your Letter of the 15 of *March* you intimate to me that you intend to print what hath paſſed between you and theſe Gentlemen, by my conveyance: and doing ſo, I hope (and earneſtly beg) that this excellent production of your ſingle brain, may have a room; which will be a more decent and honourable one, when it ſhall be accompanyed with ſeveral ſiſters of the ſame parent, and waited on by a retinue out of the Families of the two richeſt Lords of this Nation (in this kinde of wealth,) than if it came abroad ſingle by it ſelf without company or attendance. As for what you are pleaſed, moſt civilly and obligingly to ask my ſentiment in, upon occaſion of your publiſhing theſe Letters, I moſt humbly thank you for your regard to me therein, &c. If I could have imagined they ſhould have outlived your running them over (and were written by me as if I had been at the preſent ſpeaking with you) I ſhould have performed my reſpects to you in them with more care and heedfulneſs than I did.

If my health and ſtrength would permit it, I ſhould entertain you with many particulars that I muſt be fain to remit to

another time (although, indeed, you may reasonably judge this Letter so long and tedious, as rather to need a pardon for its excesse; but I am so delighted when I converse with you, that I have much adoe to give over:) for, being but newly risen out of a sickness that confined me near a Month to my bed, I am able to write no longer, this being the first time I have used my pen (in any thing of moment) since my getting up. For, to Mouns. *Fermat* yesterday when I sent him your Letters, I was fain to use my Secretaries hand. I wish you all happyness, and taking leave most respectfully of you, I rest

Paris, May 4. 1658.

Worthy Sir,

Your most humble, and most obedient servant,

KENELM DIGBY.

EPISTOLA XXXVII.

D. Fermat *ad D.* Kenelmum Digby. *quæ, cum subsequente, præcedenti inclusa erat.*

Monsieur,

IAy receu les nouvelles solutions de la proposition de Monsieur Wallisius que *M*onsieur Frenicle a adjoutées aux premieres. Ie suis ravy aussy bien que vous de l'abondance & fertilité de son esprit & de la grande facilité qu'il s'est aquise en ces matiers. Ie m' estois contenté de donner deux solutions en nombres premieres entr'eux, & avois seulement indiqué qu'on pouvoit par ma methode estendre la question a 3. 4. 5. & plusieurs nombres de méme nature, mais puis que Monsieur Frenicle m'a si avantageusement preoccupé je n'adjoute plus rien a son travail, & je consens que ma petite & maigre solution demeure en vos mains.

Apres avoir receu la lettre de Mons. Wallisius je suis toujours surpris

surpris de quoy il mépriſe conſtamment tout ce qu'il ne ſçait pas. Les queſtions en nombres entiers ne ſont point de ſon gouſt. Il s'imagine que je ne ſçay point les centres de gravité des hyperboles infinies, & il ſemble promettre ſur la fin la quadrature de l'hyperbole, c'eſt a dire de celle d'Apollonius; car pour toutes les autres ni luy, ni moy ne l'ignorons pas. Je luy reſpons ſuccintement.

Premierement a ce qu'il dit que je fay grand cas des propoſitions negatives, cõme qu'il n'y a que le ſeul quarré 25. qui adiouté a 2. faſſe un cube en nombres entiers: & encore qu'il n'y a que les deux quarrés 4. & 121. qui adjoutés a 4. faſſent des cubes auſſi en entiers. il dit que ce ſont des propoſitions ordinaires & *nequemajus quid aut grandius inſinuant quam ſi dicerem cubicubum nullum in integris eſſe vel etiam quadratum qui numero 62 junctus efficiat quadratum, vel etiam nullos in integris cubos eſſe qui ab invicem diſtent numero vicenario, nec præter 8 & 27 qui diſtent numero 19, &c. cujusmodi innumeras determinationes negativas in promptu eſſet commiſci.* Je répons que je ne fais point cas de toute ſorte de propoſitions negatives, par exemple celles qu'il raporte & infinies de telle nature ne ſont que des amuſements d'un Arithmeticien de trois jours, & leur raiſon eſt d'abord connuë *etiam lippis & tonſoribus*: de ſorte que d'en inferer de la qu'il faut faire peu de conte de toutes ſortes de propoſitions negatives, voyez Monſ. quelle Logique; mais je ne veux point d'autre preuve que celles que je vous ay propoſées ſont du haut eſtaye & dignes d'eſtre recherchées, c'eſt que ni luy qui s'eſtime tant ne les a pas encore demontrées, ni Monſ. Frenicle même que je mets au deſſus de luy ſans luy faire tort, & ce dernier qui connoit merveilleuſement les miſteres les plus cachés des nombres ne les a pas mépriſées.

Mais par ce que les nombres entiers ne plaiſent pas a Monſ. VValliſius, en voicy vne autre a laquelle il pourra s'occuper & en laquelle je n'exclus point les fractions.

Il n'y a aucun triangle rectangle en nombres dont laire ſoit quarré.

Et pour luy faire voir que le defaut de connoiſance de cette ſorte de queſtions luy féra quelquefois concevoir plus grande opinion de ſes forces qu'il n'en doit raiſonnablement avoir, il dit qu'il ne doute point que le My Lord Brouncker ne reſolve

les

les deux queſtions, *datum numerum cubum in duos cubos rationales dividere*, Et *datum numerum ex duobus cubis compoſitum in duos alios cubos rationales dividere*, le luy répons qu'il pourra paradventure ne ſe meſconter pas en la ſeconde quoy quelle ſoit aſſez difficile, mais que pour la premiere, c'eſt une de mes propoſitions negatives que ni luy ni le Seigneur Brouncker ne demontreront peut eſtre pas ſi ayſement; car ie ſoutiens,

Qu'il n'y a aucun cube en nombres qui puiſſe eſtre diviſé en deux cubes rationaux.

Pour la ſeconde queſtion, elle n'eſt pas d'une extreme difficulté, & pour luy témoigner que je veux méme la luy propoſer en cas des plus ayſés en prenant un petit nombre. Ie me contente que luy ou My Lord Brouncker diviſent ce nombre 9. qui eſt compoſé des deux cubes 8. & 1. en dex autres cubes rationaux. S'ils rejettent cette proportion qui n'eſt pas des plus difficiles, je n'oſeray plus leur en propoſer ni en entiers ni en fractions.

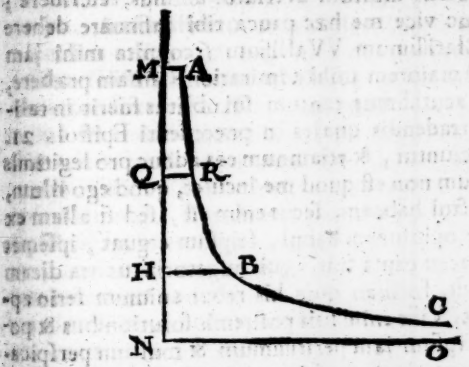
Pour ſon canon *ad inveniendos quadratos qui ducti in datum numerum non quadratum adfecta unitate conficient quadratum*, je ne ſçay pas pourquoy il doute que cette invention nous paroiſſe mal ayſé puiſqu'il n'eſt point d'Algebriſte novice qui ne trouve ſa regle d'abord Mais ma queſtion en entiers eſt ſi fort au deſſus de ces petites regles *de trivio*, que Mr. *Frenicle* la jugée digne de l'occuper; & c'eſt tout dire, Il a ſi exactement réſpondu a tout le reſte qui regarde les queſtions numeriques que j'aurois tort d'adiouter quelque choſe du mien a ſes réſponſes.

Pour ce qui regarde les centres de gravité des hyperboles infinies, & la regle pour diſtinguer celles qui en ont de celles qui n'en ont pas, que je l'avois reſolu pleinement & envoyé tant a Torricelli qu'aux Geometres de Paris dix ans avant l'impreſſion du liure *Arithmetica infinitorum*. S'il ne m'en veut pas croire, les Robervals & les Paſcals qui ont touttes mes propoſitions ſur ce ſujet depuis pluſieurs années le pourront deſabuſer.

La promeſſe qu'il fait ſur la quadrature de l'hyperbole s'executera ſans doute come celle du cercle; la voye qu'il tient en ſe ſervant de certaines progreſſions, *inter quorum terminos interpolationem quærit*, eſt de ces methodes qui aboutiſſent a treuver

treuver une choſe auſſes difficile que celle qu'on a pour but de chercher. *Obſcurum autem explicare per obſcurius, mataeotechnia eſt*, comme a tres bien dit notre Viette.

Mais pour luy faire voir que je nemanque pas de theoremes effectifs & tres beaux en la veritable hyperbole d'Apollonius, voicy un probleme dont je puis donner la conſtruction.



Soit l'hyperbole d'Apollonius A B C ſes aſymptotes M N O. ſoient tirées les deux paralleles a N O, les droites M A, H B. Je propoſe la figure A M H B. contenuë ſous l'hyperbole & ſous les droites A M, M H, H B. Il la faut diviſer une parallele aux baſes come Q R, en ſorte que le ſegment R Q H B ſoit au reſtant A M Q R en raiſon donnée. Ce probleme ſera conſtruit par moy bien pluſtoſt que Mr. VVallifius ne donnera la quadrature de l'hyperbole d'Apollonius.

En voila de reſte pour ce coup. Ce n'eſt pas pour faire un demêlé formé avec Monſieur VVallifius; mais c'eſt ſeulement pour me juſtifier a vous; conſentant que vous ne luy envoyez que ce qu'il vous plaira du contenu en cette lettre. Ie ne répons pas aux dernieres réponſes par ce que ce n'eſt pas moy qui luy avois fait les objections auſquelles il répond. Ie ſuis,

Monſieur,

A Tholoze le 7 Avril 1658.

Votre tres humble, & tres obeiſſant ſerviteur

FERMAT.

EPISTOLA XXXVIII.

D. Frenicli *ad D.* Kenelmum Digby.

Mihi quidem propoſitum erat, vir Illuſtriſſime ac honoratiſſime, nihil amplius circa has contentiones utpote mihi faſtidioſas, & à quibus multum averſatur animus, reſcribere; attamen hac adhuc vice me hæc pauca tibi inſinuare debere cenſui, ut ſcias Clariſſimum VValliſium (cognita mihi jam ipſius eruditione) majorem mihi admirationis anſam præbere, quonam pacto vir acutiſſimus tantum ſui oblitus fuerit in talibus ſolutionibus tradendis quales in præcedenti Epiſtola 21. Nov. data conſpiciuntur, & etiamnum eas adhuc pro legitimis ſuſtineat. Cæterum non eſt quod me incuſet, quod ego illum, & opera ſua deſpectui habeam, ſecus enim eſt, ſed ſi aliam ex illo quam decebat opinionem habui, ſeipſum arguat, ipſemet etenim hujus fallaciæ cauſa fuit, qui nugatoria ut ita dicam pro ſeriis impertivit, forſitan quia his rebus animum ſerio applicare neglexerit. Viſis enim ſuis poſtremis ſolutionibus & poſtrema Epiſtola, ipſum jam peritiſſimum & multum perſpicacem agnoſco, quamquam ſuis opinionibus & quas ſemel protulit tuendis nimium aſtrictum, non attendendo quam familiare ſit hominibus decipi, reſipere vero, & importunam pertinacitatem abigere valde honeſtum atque laudabile. Neque etiam exiſtimet me de ipſo triumphum agere, aut illi inſultare voluiſſe; ſed reſponſum ſuæ Epiſtolæ non inconveniens reddidi, & paratus ſum ei ſatisfacere ſuper omnibus quæ habentur in binis Epiſtolis de quibus conqueritur; & nihil in ipſis quod admittendis rationibus non ſulciatur, & prædictæ Epiſtolæ 21. Nov. apprimè non reſpondeat, contineri oſtendere. Falſam enim quam de illo habere debui opinionem non eſt quod mihi objiciat, quia non potui de illo aliter, quam ex ſuis operibus judicare. Ex fructibus eorum cognoſcetis eos. Et non eſt Mathematicus qui me mitius quam par erat cum ipſo egiſſe non judicet, niſi omnino tacuiſſem. Sed equidem ſi quid eſt cavillationis in reſponſis, hanc certè utilitatem attulit ut per illam qualis ſit ipſe mihi & aliis qui poſtremam ipſius Epiſtolam viderunt partim innotuerit, ſtimulum enim illi addidit ut quæſtiones

nes accuratius inſpiceret & penetraret: per hanc enim, tertiam Fermatianam, & ſuam poſſidere apparet: de duabus primis Fermatianis ambigitur donec tradat alium ab unitate cubum & quadratum qui cum ſuis partibus faciant quadratum vel cubū; vel ſaltem problema ſolvat, in Freniclis ad Schoteniam ſolutionem Inquiſitione paginis 3. & 4. contentum, & quæſitos in numeris tres cubos & quadratum Analyticis notis expoſitos reperiat. Animadvertat etiam Clar. Wallisius ut non Fermatii ſilentium taliter accipiat, quaſi ſibi ſatisfactum fuiſſe putet, & talibus ſolutionibus acquieſcat; multo enim ſecus eſt; ſed inde prodiit, quod tantum ſuis non recipiendis ſolutionibus eum addictum videat, ut ipſum in illarum falſa exiſtimatione, & vano quod ab illis accepit gaudio relinquere, ſatius eſſe autumet, quam fruſtra conari, ut illum ab ipſis deterreat. Quædam autem ſunt in poſtrema Cl. VVallisii Epiſtola 19. Martii data in quibus mihi ſincere non agere videtur, cum ſecundam ex binis meis Epiſtolis de quibus ſupra, primæ contradicere ſuſtinet, quia, inquit, unitatem pro cubo & quadrato 2ª recipit, 1ª rejicit. Non enim in 1ª. unitas pro cubo aut quadrato repudiatur, cum ipſa communiter ut talis aſſumatur: Sed cum non habeat partes, hanc pro cubo aut quadrato quæſitis (qui quidem ſuis partibus jungi, & ideo partes habere debent) tradi poſſe negatur. Cum igitur in 1ª nullum Cubum VVallisium tradidiſſe perhibetur, cum unitatem obtulit, luce clarius eſt intelligendum eſſe, non quod nullus plane cubus ſit unitas, ſed nullus qui quæſtioni ſatisfaciat. Quod autem ſpectat ad ſolutiones quæ tam faciles ſunt, ut ad eas multiplicatio numeri dati in 2 vel 3 ſufficiat, neſcio an in Anglia tua admitti conſueverint; minime verò hic admitterentur; & quam vis verum ſit problema imperfectè propoſitum fore quando talis ſolutio ei ſatisfacere poteſt, ſi ea non ſit ſecundum mentem Authoris, attamen taliter aſtringendos eſſe Mathematicos non exiſtimamus ut omnino accuratè proponere teneantur, præſertim cum ab eruditis traduntur qualem eſſe doctiſſimum Fermatium non eſt quod in dubium revocetur, & cum animi tantum gratia & raptim exhibentur; ad ſolventem enim attinet juſtam & de ſe dignam ſolutionem impertiri: Et ſi quis ſerio tale problema & tam facile ſolvendum alicui proponeret

illud pro injuria ſumeretur, quaſi eum pro imperito haberet, ad quem talia quæ nedum pueris tradi deberent, ſufficere viderentur. Hæc tibi vir Illuſt. indicanda putavi, ut ſcias quid jam de Clariſſ. VValliſio cenſeam, & invitum me, invitante & quaſi compellente, (mihi enim tua deſideria juſſa ſunt) judicium de ipſius Epiſtola tuliſſe; inſuper & me tibi ſemper devinctiſſimum & addictiſſimum fore. Vale.

EPISTOLA XXXIX.

D. Joh. Wallis *ad* D. Kenelmum Digby.

QUas ad me miſeras, Heros Nobiliſſime, Tuas literas, Pariſiis 4 Maii St. nov, datas accepimus Maii 3, ſtilo noſtro: quam ego uti gratulor celeritatem, ita dolere ſubit quod tam tarde quas ad Te miſerim eo pervenerint. Tuas autem accepiſſe cum omnino fieri non poſſit quin me non modica reficiat voluptate (utpote quum inde diſcam liceat quanta me fueris benevolentia proſecutus atque honore affeceris;) non interim diſſimulandum quia unum ſit aut alterum quod inibi me male habeat. Atque illud quidem maxime, quod ad verſæ tuæ valetudinis nuncium ſecum ferant. quippe qui non ignorat in literis promovendis quantus ſis, non poteſt non de Te tuaque valetudine admodum eſſe ſolicitus, ut qui non ignoret quantum hinc dependeat. Divino interim Numini tribuendum erit, quod, in bonarum literarum commodum, Te ſoſpitem conſervârit, decori adhuc futurum & ornamento. Dolet inſuſuper, ubi profuſas quas in me effundis laudes conſpicio, (quod humanitati tuæ non meis meritis dandum eſt,) non modo omnino imparem me eſſe merendis illis, ſed & rependendis quæ inde debeantur gratiis. Ea enim facilitate ſtili polles, animiq; ad humanitatis officia promptitudine, ut imprudentiæ planè noſtræ dandum ſit ſi velim hac ex parte tecum certare, tuaq; in me collata beneficia verbis æquare coner. Faſſus itaq; quam ſim ad hoc imbellis, ut plane victus ſuccumbam, nec præter animi humillime ſubmiſſi gratitudinem, quam credas velim verbis ſuperiorem, non habeam quod rependam; ſi faſſo veniam

largiri

largiri velis, nec dedigneris quem hactenus largitus es favore prosequi; quæ sequuntur reliqua paucis absolvam.

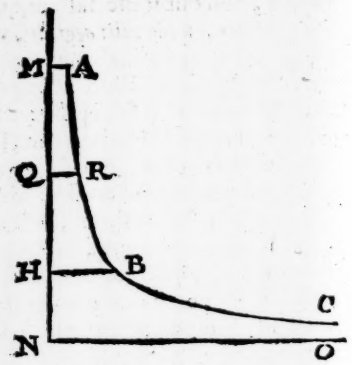
Et quidem ad inclusas D. Frenicli literas, quarum humanitatem gratus agnosco, vix est quod reponam, præter grates nostras ob eam quam de me opinionem conceperit & profitetur. Quam utique de prioribus literis sive excusationem sui, sive & defensionem exhibeat, lubens admitto. Neque contendam, si, quam ego justam nostri defensionem me attulisse putaverim, importunam ille pertinaciam etiamnum autumet: vel etiam, quod, an duobus primis Fermatii quæsitis potis sim respondere, adhuc ambigat; quod tamen ubi nostras 4 & 15 Martii datas perpenderit non ultra dubitabit. Sed nec disputabo an prioribus suis literis unitatem negaverit quadratum esse vel Cubum. Nihil enim horum tanti est, ut cum Nobilissimo Viro de his contendam. Ad nostram autem quod attinet quæstionem (de Quadratis qui partibus suis additi eandem efficiant summam,) Fermatio pridem obiter propositam; video (ex literis nuperrime receptis) non modo Fernclum eam solvisse, sed & pluris longe fecisse, quam ipse facturus essem. Neque etiam aliter expectandum erat, quin eam promptissime solvat, cum ex iisdem plane principiis dependeat iistius solutio, atque illarum Fermatii quas pridem solverat.

Sed neque multum est quod ad D. Fermatii literas reponendum judico. Saltem hæc duo sufficiant. Alterum, quod, ubi insinuat me suscepisse, non dubitasse saltem, quin D. Vicecomes Brouncker *potis sit solvere, modo velit aggredi*, propositionem illam de *Dato cubo in duos cubos rationales dividendo*, cum interim (uti jam affirmat) propositum illud sit impossibile; adeoque me temere saltem & incaute id suscepisse: dicendum est Clarissimum Virum, quod ego inibi susceperim, imperfecte admodum recitare; reticendo nempe, quod ego addideram, *saltem quatenus natura rei patitur*. Quod quidem ideo subjunxi, quia jam tum suspicabar, vel primo aspectu, rem esse impossibilem, (utut, cum nondum examinaveram, non erat cur affirmarem;) adeoque non aliam insinuabam solutionem quam qualem res ipsa patitur; (nempe, ut rem præstet si sit possibilis, vel, si secus, ut deprehendat impossibilitatem,) Quæ quidem me conjectura neutiquam fefellit. Siquidem sub id tempus, idip-

ſum mihi ſignificavit vir Honoratiſſimus, quod jam Fermatius ſuggerit; his verbis: (literis privatis ad medatis) *Sir, The laſt night I received yours*, &c. *Your opinion therein concerning Mr.* Fermat *is really the ſame with mine, eſpecially in relation to his laſt Paper*, &c. *His negative determinations are, I conceive, his greateſt glory, and where in he thinks himſelf to be ſingular: Elſe certainly hee would not propoſe things impoſſible*, viz. Datum numerum cubum in duos cubos rationales dividere, *which is impoſſible.* (*Not meddling with the other, as done already, at leaſt in ſeveral inſtances, by Monſ. Frenicle, as you know.*) &c.

Alterum id eſt quod de Hyperbolis habet. Ubi exiſtimat me fidem non habere dictis ſuis de centro Gravitatis in Hyperbolis Infinitis. Quod longe ſecus eſt. quippe ego ne ſuſpicabar quidem, quin egerit bona fide Vir Nobiliſſimus, cum ea ſibi perſpecta dixerit, & quidem à multis annis; nempe, in Hyperbolis Integris; (fortaſsis etiam & in ſemihyperbolis, utut illud nondum dixerit:) Uti nec jam ſuſpicor, quin quam hic ſubjungit quæſtionem potis ſit ſolvere. Sed & alia quamplurima, ſive de Hyperbolis, ſive de aliis item Geometriæ apicibus, vel etiam Arithmeticis, egregia Theoremata ſibi præſto eſſe nullus dubito. Quorum & ſpecimina non pauca jam præſtitit.

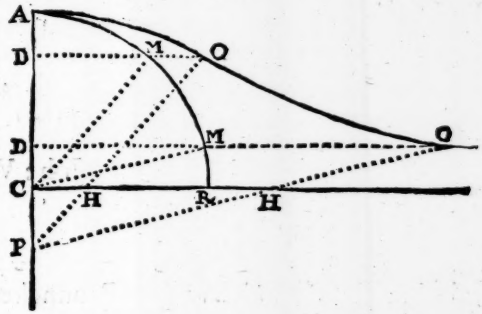
Quam autem jam exponit quæſtionem; nempe *Expoſitâ vera Hyperbolâ* A B C, *cujus Aſymptotæ*, N M, N O; *quarum alteri put*



NO, *parallelæ ducantur* MA, HB: *Propositum est, figuram* AMHB, (*lineâ Hyperbolicâ, & tribus rectis* AM, MH, HB, *contentam,*) *rectâ* QR (*quæ sit ipsis* HB, MA, *parallela,*) *ita secare, ut segmentum* RQHB, *ad reliquum* AMQR, *sit in ratione data*: Sic solvo. Si data ratio sit effabilis, veris exponatur numeris integris, puta ut 3 ad 2, vel ut *a* ad *e*; atque inter rectas *NH*, *NM*, inveniantur tot mediæ proportionales (saltem, ex tot, ea quæ opus erit) quot est utriusque numeri aggregatum unâ minus, puta $4=3+2-1$, vel $a+e-1$; quarum tertia (sive quæ ab *a* denominatur) ab *NH*; vel secunda (sive quæ ab *e* denominatur) ab *NM*; sit *N*Ω. Dico; Rectam Ω*R* (quæ à puncto Ω, ipsis *H B.* vel *MA*, ducatur parallela) rem imperatam præstare. Si vero data ratio sit ineffabilis, poterit id ipsum præstari, Logarithmorum ope, quamproxime, utut non secundum Geometricam ἀκείβειαν.

Reliqua quod attinet; vel jamdudum de illis dictum est, vel omitti saltem poterunt. Neque enim vacat, vel operæ pretium esse duco, ad singulas minutias descendere.

Cæterum, ut Nobilissimo Viro vices rependam, visum est, Quæstionem hanc (præcedenti suæ non absimilem, nec minus fortassis elegantem,) sibi reponere: Nempe, *Expositâ Conchoide*



AO, *cujus vertex* A, *Polus* P, *regula* CRH (*rectam* AP *in puncto* C *secans ad angulos rectos*) *si centro* C *ducatur quadrans circuli* AR (*versus partes* OH:) *Propositum sit, Figuræ conchali* OARH *infinitæ* (*lineis*

lineis RH *rectâ, & conchali* AO, *infinitis, una cum quadrantali* AR; *contentæ*) *istiusmodi aliam* (*puta* ω α ϱ n) *in data ratione describere.* Nisi malit ut Theorematice potius exponam (ne tantum gryphos videar proponere) ad hanc formam. *Rationem figuræ conchalis infinitæ* OARH, *ad istiusmodi aliam quamcunque* ω α ϱ n, *componi ex rationibus* CA *ad* κ α, *&* CP *ad* κ ϖ (idem nempe denotantibus literis α, κ, ϖ, ϱ, n, ω, in una figura, atque *A, C, P, R, H, O,* in altera,) quantumvis immutetur ratio rectarum *AC, CP.* Cujus tum investigationem, tum demonstrationem, si expetat, exhibebo.

Unicum adhuc supereſt, vir Illustrissime. Intelligo ex literis tuis, Nobilissimos ambos esse viros quibuscum hactenus egimus. Et fieri quidem omnino posse puto, ut vir exterus, nec rerum vel dignitatum istius gentis satis callens, familiarius aliquando quam par est, nec satis fortasse pro dignitate sua, Nobilissimos Viros compellaverim, sive dum meas, sive dum & Honoratissimi Vicecomitis partes egerim. Sin istiusmodi quicquam peccavi, invitus peccavi: nec imputabunt, spero, Nobilissimi Viri, (qui in communem mecum arenam descendere dignati fuerint, sponte sua,) pulveri scholastico, quam Aulari, magis assueto. Quam ipsam excusationem admittas, oro, siquid istiusmodi in Te peccaverim; Neque enim alias me gessisse velim, quam ut deceat,

Oxon. Maii 5. 1658.

Illustrissime Vir,
Humillimum Tui, atque obsequentissimum servum

Joh: Wallis.

EPISTOLA XL.

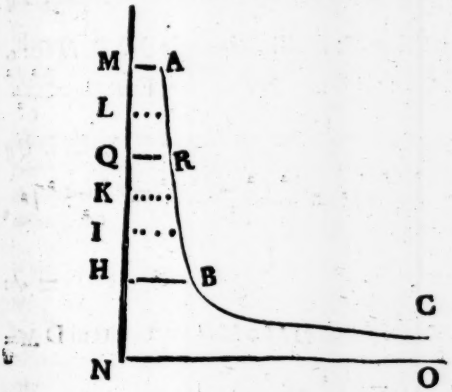
D. Joh. Wallis *ad D. Vicecomitem* Brouncker.

Nobilissime Domine,

Literas meas nuper scriptas, Parisios transmittendas, Te tutò accepisse intelligo. Quas autem à me postulas demonstrationes

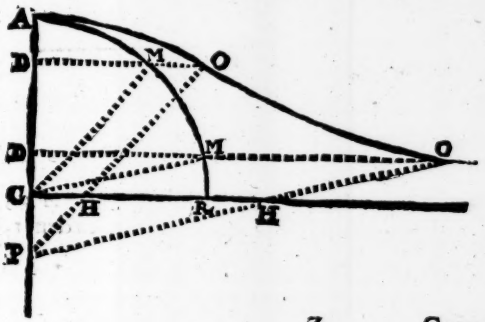
ſpectantes ; ſic breviter accipias.

Problematis Fermatiani (de *ſpatio Hyperbolico in data ratione dividendo*) ſolutio ſic demonſtratur. Sumptis (in Aſymptoto) rectis *NH, NI, NK, NQ, NL, NM*, Geometrice proportionalibus ſi à punctis *H, I, K, Q, L, M*, ducantur rectæ parallelæ alteri A-



ſymptoto, ſpatium Hyperbolicum *A B H M* in quinque partes æquales dividi, oſtendit Gregorius de ſancto Vincentio, libro (ſi memini) decimo. Harum itaque cum hinc duæ, illinc tres reperiantur manifeſtum eſt a recta *QR* in ratione 2 ad 3 ſecari. Quod erat demonſtrandum.

Noſtrum autem ſive Problema, ſive Theorema, de Figura

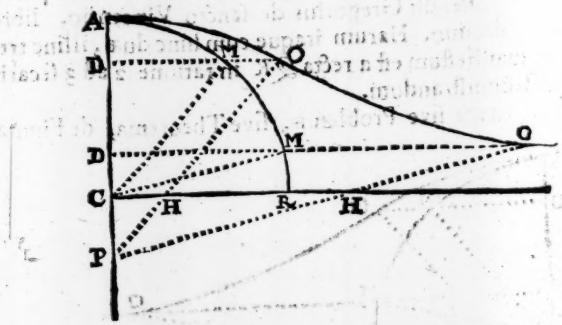


Conchali; ſic breviter habeas explicatum. Eſto Conchoidis AOO, polus P, vertex A, norma CHH; quadrans circuli CAR; ordinatim applicata quælibet in quadrante, DM; in concholde, DO; reliquaque ut in Schemate conſtructa. Ponamus jam, ob commodiorem calculum, HO ($=CA=CR=CM$) $=r$. Et $CP=p$. $CD=o$. Et PD ($=p+c$) $=l$, adeoque $PDq=l^2$.

Tum (propter parallelas, & ſimilia triangula) $CD.HO::c.r::PC=p.PH=\frac{pr}{c}::PD=l.PO=\frac{lr}{c}$. Et $POq=\frac{l^2r^2}{c^2}$.

Item (per 47 e 1) $CMq-CDq=DMq=r^2-c^2$. Et $DOq=POq-PDq=\frac{l^2r^2}{c^2}-l^2=\frac{l^2r^2-l^2c^2}{c^2}=\frac{r^2-c^2}{c^2}l^2$.

Adeoque $DO=\frac{l}{c}\sqrt{:r^2-c^2:}=\frac{b\mp p}{c}\sqrt{:r^2-c^2:}=\sqrt{:r^2-c^2:}\mp\frac{\sqrt{:r^2-c^2:}}{c}p.=DM\mp MO$. Eſt autem $DM=\sqrt{:r^2-c^2:}$ Ergo $MO=\frac{\sqrt{:r^2-c^2:}}{c}p$.



His poſitis. Si, in diverſis conchoidibus AO, $A\omega$, maneat utrobique eadem quantitas CA, (adeoque ut eædem r, c,) mutata

tata quantitate PC, (puta p in ϖ) erit ubique MO ad $M\omega$, ut $\frac{\sqrt{:rr-cc:}}{c}p$, ad $\frac{\sqrt{:rr-cc:}}{c}\varpi$; sive ut p ad π. Adeoque & omnes MO ad $M\omega$, hoc est, propter eandem utrobique altitudinem, figura $RMAO$, ad figuram $RMA\omega$, ut p, ad ϖ.

Sin, manente quantitate $PG = p$, mutetur quantitas CA, adeoque & CD; puta r in ϱ, & c in κ; erit ubique MO ad $M\omega$, ut $\frac{\sqrt{:rr-cc:}}{c}p$, ad $\frac{\sqrt{:\varrho\varrho-\kappa\kappa:}}{\kappa}p$, sive ut $\frac{\sqrt{:rr-cc:}}{c}$ ad $\frac{\sqrt{:\varrho\varrho-\kappa\kappa:}}{\kappa}$ hoc est ut r ad ϱ. (Sunt enim omnes $\sqrt{:rr-cc;}$ ad omnes $\sqrt{:\varrho\varrho-\kappa\kappa:}$ hoc est, quadrans ad quadrantem, ut rr ad $\varrho\varrho$, sive in duplicatâ ratione radiorum: Item c ad κ, ubique ut r ad ϱ: Adeoq; omnes $\frac{\sqrt{:rr-cc:}}{c}$ ad omnes $\frac{\sqrt{:\varrho\varrho-\kappa\kappa:}}{\kappa}$ ut $\frac{rr}{r}$ ad $\frac{\varrho\varrho}{\varrho}$, sive ut r ad ϱ.

Sin denique fiat utrobique immutatio; puta tum quantitatis PC, tum CA; hoc est p in π, & r in ρ: erunt omnes $M\Theta$, sive $\frac{\sqrt{:rr-cc;}}{c}p$, ad omnes $\mu\omega$, sive $\frac{\sqrt{:\rho\rho-\kappa\kappa;}}{\kappa}\varpi$; (hoc est, figura $RMAO$, ad figuram $\rho\mu\alpha\omega$;) in ratione compositâ ex p ad π, atque ex r ad ρ: hoc est, in ratione pr ad $\varpi\rho$; sive, ut rectangulũ PCA, ad rectangulum $\pi\kappa\alpha$. Quod erat ostendendum.

Atque hoc cognito; facile erit vel figuram conchalem $RMAO$ in data ratione secare, vel etiam aliam in data ratione construere.

Problema tertium, cujus etiam solutionem à me petis (quod Fermatii literas non spectat) hoc erat. Sub initium Februarii jam proximè elapsi, amicorum non nemo cui forte occurrebam serò vesperi, quæstionem sequentem mihi porrexit in scriptis; quam jam nuperrimè, ab eodem intelligo typis vulgatam esse cum hac Epigraphe; *Spectatissimos viros Matheseos Professores, & alios præclaros in Anglia Mathematicos, ut Problema solvere dignentur*, Jean de Montfert *maximè desiderat.*

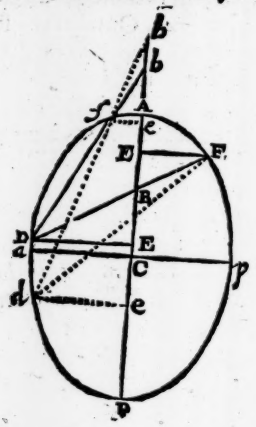
Extremis Ellipſeos Diametris, diſtantia centri ab aliquo puncto in axi tranſverſo, ubi linea eandem ſecet ſub angulo dato, in numeris datis: ſegmenta ejuſdem lineæ (ſi opus eſt) productæ, & intra tranſverſum Axim & Ellipſim terminata, in numeris invenire.

Datis { A C. 1,00000. / a c. ,76604. / C B. ,50000. / CBD. 70 grad. } Quæruntur { BD. / BF. }

Hanc ego quæſtionem, ſuam ratus (neque enim vel innuebat ille, vel ego tum ſciſcitabar, cujus erat, paulo adhuc univerſalius expoſitam, ſub hac fere quæ ſubeſt formâ (neque enim ipſiſſima verba memini) poſtero mane ſolvebam; nec eram de illa ultra ſolicitus; (ut quæ res nec magnæ difficultatis videbatur, nec momenti; quam &, quod jam audio, varii variis modis ſolvebant, utut eorum ſolutiones nondum viderim.

Datis, in Ellipſi extremis diametris, (vel etiam conjugatis quibuſvis, una cum inclinationis angulo,) A P, ap; *quarum utrivis, puta* A P, *occurrat in dato puncto* B, *(ſive intra Ellipſim, ſive etiam extra productæ, recta* D F, *Ellipſi in punctis* D F *occurrens: Rectas* B D, B F, *inveſtigare.*

A punctis D F, diametro A P, ordinatim applicentur D E,



FE.

FE. Vt ponamus (ob calculi commodum) AP = 2 d, ap = 2 ♂; DE vel FE = a, BG = b, CE = c; adeoque eſt BE = c ~ b, differentiam duarum BC, CE; (ſupponimus enim, tum FE, tum DE, cadere ſupra rectam ap; adeoque quoties DE cadit infra rectam a C p, reputanda eſt eo caſu CE quantitas negativa; ſive quod eodem redibit, erit BE = c ∓ b; quod tamen calculum non turbabit.

Cum autem in triangulis DBE, FBE, dentur omnes anguli, (nempe propter datum ad B, & rectum vel ſaltem datum ad E,) habetur ratio laterum ad invicem; (ea nempe quæ eſt ſinuum oppoſitorum;) puta BE, ad DE (vel FE) ut n ad m. Adeoque cum ſit BE = c ~ b, & DE (vel FE) = g; Erit n. m :: c ~ b. a = $\frac{c \sim b}{n}$ m. Et aa = $\frac{cc + bb - 2cb}{nn}$ mm.

Porro, cum, in Ellipſi, ordinatim-applicata DE vel FE, ſit, vel media proportionalis inter diametri ſegmenta AE, EP (ſi nempe a C = AC,) vel ſaltem ut aC ad AC, ſic ordinatim-applicata ad illam mediam proportionalem; (adeoque & quadrata quadratis proportionalia;) Erit, ut AC = d ad aC = ♂, ſic √; AE × EP = ; ad DE (vel FE) = a. Et dd. ♂♂ :: AE × EP. aa.

* Eſt autem AE × EP; = $\frac{1}{4}$ AP − CE, in $\frac{1}{4}$ AP + CE; = d − c, in d + c; = dd − cc.

Ergo dd. ♂♂ :: dd − cc. $\frac{dd - cc}{♂♂}$ ♂♂ = aa.

quoniam igitur $\frac{dd - cc}{dd}$ ♂♂ = aa = $\frac{cc + bb - 2cb}{nn}$ mm.

Erit dd ♂♂ nn − cc ♂♂ nn = cc dd nn + bb dd mm − 2 cb dd mm;
Et mm bb dd − nn dd ♂♂ = 2 mm 2 bb dd c − mm dd cc − nn. ♂♂ cc.

Et $\frac{mm\,bb\,dd - nn\,dd\,♂♂}{mm\,dd + nn\,♂♂} = \frac{2\,mm\,bbdd}{mm\,dd + nn\,♂♂}$ c · cc.

Et reſolvendo æquationem)

mm b dd ∓ nd ♂ √ : mm dd + nn ♂♂ − mm = c = CE.
mm dd + nn dd

Ubi notandum eſt, quod quantitatum ſic ambigue deſignatarum, (per ſigna ±, ∓,) major ℄ quam reſpicit ſignum +) denotat ℄ E diſtantiam puncti E remotioris à centro; minor autem (quam reſpicit ſignum ∓) CE diſtantiam puncti E propioris, quod quidem ſupra centrum verſus B ſitum eſt (prout ſupponitur) ſi quantitas prodeat affirmativa, nempe ſi m^2bd^2 major ſit quam $nd\sqrt{:}\ m^2d^2+n^2b^2-m^2b^2:$ vel ultra centrum ſi minor ſit, adeoque quantitas prodeat negativa; vel denique, ſi, propter earundem æqualitatem, ſe mutuo deſtruant, adeoque evaneſcat quantitas, erit illud E in ipſo centro. Sed & porro, (quod quandoque obtinget ubi B ſumitur extra ellipſim) ſi quãdo *mmbb* major ſit quã *mm dd+nn bb*, adeoq; æquatio evadat impoſſibilis; argumentum eſt, rectam in dato angulo, productæ diametro in dato B puncto occurrentẽ, ellipſin intactam præterire, ipſaque puncta D, F, nuſquam eſſe; ſin æquales ſint, ſe mutuo periment *mm bb* & *mm dd+nn bb*, rectaque ſic ducta ellipſim tanget quidem ſed non ſecabit, punctis D F coincidentibus. Quæ omnia, Æquationum naturam callentibus, ſatis obvia ſunt, ut non ſit opus ea fuſius explicare.

Habitis autem punctis tum B dato, tum invento E, habetur BE latus trianguli DBE vel FBE, adeoque & ℄ cognitis ut dictum eſt omnibus angulis) latus BD, vel BF; (nempe, ut ſinus anguli D vel F, ad ſinum anguli E; ſic BE, ad BD vel BF) quod erat inquirendum.

Atque hæc ſunt inſigniſſime Domine, quæ, ut mandatis tuis obtemperem, exhibere oportuit,

Maii 11. 1658.

Tuique & mandatorum tuorum obſervantiſſimum,

Joh. Wallis.

EPISTOLA XLI.

D. Kenelmi Digby *ad D.* Th. White.

Moſt honoured Sir,

I Humbly thank you for yours of the fifth of *April*: And I aſſure you I have been much delighted with thoſe you then ſent me from my Lord *Brouncker* and Dr. *Wallis*. They have now ſhewed themſelves effectively (both of them) very great perſons. It hath happened ſome of the ableſt Mathematicians here have been with me ſince I received their letters; which I ſhewed them, and they now look upon them with great veneration. Indeed it hath been Monſ. *Frenicle* that hath occaſioned their coming to me, to ſee thoſe letters of theirs that he ſpeaketh ſo highly in commendation of; for, though he would not let any body ſee what he wrote in reprehenſion, yet he divulgeth to all the world what he ſpeaketh in praiſe, which I take to be an argument of a noble mind. I leave open my packet to Dr. *Wallis*, that you may read it, and then impart it to my Lord *Brouncker*, whom, after reading the contents, I beſeech to ſeal and ſpeed it away to the Doctor. I wrote by the laſt poſt to his Lordſhip, therefore will not preſume to trouble him again with a particular letter to himſelf, but beſeech you to preſent my humble ſervice to him. Truly theſe laſt letters from his Lordſhip and the Doctor hath wrought a mighty change in mens opinions of them. They are now looked upon as the greateſt Mathematicians of the Age: And let me tell you this in particular, I asked M. *Frenicle* how he was weighed....in the ſcale againſt either of theſe, he preſently replyed there was no weighing of them together; for he was but as a ſlight Scholar in reſpect of them, the greateſt Maſters of the Age. I will hold you no longer at preſent, but reſt

Paris May 8. 1648. *Your moſt humble*

and moſt affectionate ſervant

KENELME DIGBY.

EPISTOLA XLII.

D. Kenelmi Digby *ad D.* Joh. Wallis.

Moſt honoured Sir,

ALthough I troubled you with a long letter by the laſt poſt (the fourth of this moneth) yet I cannot forbear but com thus ſoon again to ſalute you with a new one; which is an effect of the exceſsive content yours of the fourth and fifteenth of *March* have given me, that obligeth me to witneſs it again to you in a word or two. In earneſt, nothing that hath occurred to me this many a day, hath been ſo pleaſing to me, as theſe letters of yours and what you wrote at the ſame time to my Lord *Brouncker*, and what his Lordſhip then alſo wrote to me moſt learnedly and upon profound and ſubtile ſpeculation. You have now ſhewed our Mathematicians here, that like *Sampſons* you can eaſily break and ſnap aſunder all the Philiſtians cords and ſnares, when the aſſault eometh warmly upon you. And the greateſt men here, are now forced to allow, that *Engiand* yeeldeth to no part of the world in theſe noble ſpeculations. Monſ. *Frenicle* now ſpeaketh loud and high, how much he reverenceth your deep knowledge: onely hee complaineth, that you would let him run on ſo long in his error, by ſo long dallying with him as if he were too weak a gameſter for you to play your beſt and ſtrongeſt againſt him. He hath promiſed me that he will ſend me to day a Letter to expreſſe his ſentiments in that ſtrain. Wherefore I will keep my Packet open to the laſt hour (if it ſhould not come before) that you may have it by this Poſt; for I believe it will not be diſpleaſing to you to ſee ſo great a perſon (in this ſubject) acknowledge truth as he ought to doe, and ſubmit frankely to it. I have alſo ſent away your Letters to Monſ. *Fermat*; and when I receive his ſenſe upon them, I will ſend it you. I kiſſe your hands and reſt,

Worthy Sir,

Paris May 8. 1648.

Your moſt humble and moſt obedient ſervant

KENELME DIGBY.

EPISTOLA XLIII.

D. Frenicli *ad* D. Kenelmum Digby.

PErlegi quas ad me transmisisti postremas *Mart.* 4. & 15. Clar. *Wallisii* Epistolas, Eques illustrissime & honoratissime; quibus mihi clare innotuit quantum nunc ipse *Wallisius* in Mathematicis disciplinis profecerit; sed suspensus hæret animus dum inquiro quid moverit virum eruditissimum, vel quid causæ ipsi fuerit ut tamdiu nobis ignotus esse voluerit, præsertim cum ipsius muneris sit, & officii scientias notas facere. Fateor aliquantum in ipso deceptus sum; sed siquid deliqui non mihi sed ipsimet est imputandum. Qualis apparuit, tale judicium sortitus est; quamquam non æquo animo, sed renitenti, quando ipsi dedecori fuit, illud protulerim. Idcirco quamdiu reprehensionibus fuit locus, noluissem ex me ipsas provenire manifestum fieri, & delitescens non dato nomine pro monitionibus potius, quam pro reprehensionibus sumi optassem; non ego volebam videri, quamquam tunc non immerito, reprehendisse virum Clarissimum. Ast modo quandoquidem ad approbationes eransendum est, non jam occulte, neque renitens, sed palam & gaudens spectante tota literatorum turma ego ipse, nominatim apparebo. De somniante *Wallisio* judicium dederam, nunc autem de vigilante sensum lubens aperiam, Herculem ante videram, sed cum puellis jocantem, nunc eundem intueor hidram & monstra debellantem: levia scilicet primum & puerilia sectantem, sed ardua demum & gigantea promentem. Ad clarissimum Schotenium quidem peculiariter spectabant de cubis suis partibus addeudis proposita problemata, sed antevertit vir perspicacissimus; in his certe vires suas probare, non in minutissimis rebus, in his & similibus sese exercere debuit Vir Clar. & Atlanti virtute persimilis.

Cedat jam Angliæ Batavia, & ipsius Lugdunum Oxonio; quamquam Galliæ Narbonensis & Celtica cum Kentio, & Oxoniensi Britannicis de palma decertare, & paribus forsitan viribus possent contendere, ne dicam majoribus non enim meum

est tale judicium ferre, sed aliis reliquendum, quamquam huc usque pugna non æqua fuit; neque pari eventu decertatum.

Cæterum ignoscat rogo Clar. vir si quædam liberius quam decuit de ipso scripserim. Tu nosti quidnam ad me ista impulerit, non ad convitiis & objurgationibus eum afficiendum, neque ad ipsius gloriæ quidquam detrahendum, binas enim Epistolas de quibus conqueritur occultas tenui, & amicis etiam negavi eas expostulantibus, & solum *Wallisium* si possibile fuisset ipsas perlegisse concupiscem; tu nosti inquam me solummodo ad ipsum stimulandum feciſſe, ut quid in ipso virtutis esset aliquo modo comprobare possem, & certe melius probassem, si cubos ante acceptos in opusculo latino à me tibi vir Nobilissime dedicato solutiones tradidisset, id est absque cujusquam auxilio; non desunt enim qui suspicentur, & dicant quod cum in illis reperiendis invigilaverit Clar. *Wallisius* & labor ipsius non successerit ut saltem aliquid qualecumque illud foret impertiretur unitatem pro cubo & quadrato, numeris qui quæstionem perfecte solverent deficientibus, pro solutione protulerit; satis enim fuit (aiunt) viro perspicaci per viam apertam & iter tritum & complanatum incedere potuisse, cum ipsi licuerit datorum cuborum partes cubicas, & eorumdem cuborum partialium summæ partes inspicere; & inde haud ita difficile fuisse suam methodum fabricare confabulentur: (quod quidem non sit dictum quasi aliquid ex gloria ipsi debita detrahere, aut imminuere velim) & quidem ista non omnino rationi apparent absona, unde conjiciunt meum opusculum non parum illi profuisse in adinvenienda sua methodo, sed id quod in meis Epistolis ipsi Wallisio contrarium & nocivum apparuit in ejus abiit emolumentum, nisi enim puncturis quasi stimulis eum appetissem, & si unitatem suam approbassem forsitan sua solutione contentus, nihil ultra fuisset aggressus. Nihil igitur me ultra jam incuset vir Clar. cum ei non parum ipsum arguendo conduxerim, ut cunctis etiam literatis; & me potius de illo & de cæteris benemeritum esse fateatur, quod cum præclaram lucem possideret Oxonium. & non minorem Londinum quamquam nobis adhuc nebulis tectam, eas veluti cavillationibus, veluti procellis quibusdam abegerim. Interim non credat Clar.

Wallisius

Wallisius me cujuſquam gloriæ invidere, nec gentem aliquam, tuam præſertim, deſpicatui habere (virtutem veneror ubicumq; fuerit) imo Angliam tuam etiam olim à me viſam ſpeciali ſemper benevolentia proſecutus ſum & proſequor: quinimo lætitia magna ſum affectus, quod tandē me cum quibuſdam aliis deceptum deprehenderim; quamquam tantiſper indignatione commotus quod tandiu vires ſuas nobis abſcondere voluerit; neque etiam exiſtimet vir Clar. me tanti mea facere; quin ea potius ut plurimum parvipendo, quo fit ut iſta in aliis qui hiſce operamdant non reperiri ſtupeam & ſi longe aberrent erubeſcam. Sed de his ſatis ſic; nunc ad ea quæ ſcientiam ſpectant accedamus.

Doleo cur Clar. Vir unitatem adhuc pro legitima ſolutione nobis ingerat, & attendere nolit quod ſi unitas, ut ſæpius inculcavi, nullas habet partes certe ſuis partibus jungi nequit, unitas inquit eſt cubus qui additus ſuis partibus aliquotis quippe nullis, manet adhuc 1. qui eſt quadratus. Reſpondeo. Si unitas ſuis partibus addi poteſt, certe aliquibus; ſi vero nullis, quomodo quibuſdam? Miror quonam pacto vir perſpicaciſſimus in contradictione tam manifeſta hæreat: præſertim cum de numeris non de irrationalibus hic agatur: ſi nolit admittere, quiete ſua perfruatur nihil amplius ego circa iſtud eloquar. Omiſſis igitur iſtis vanis & nullius momenti contentionibus, ad defenſionem circa quæ mihi objicit vir Clar. me accingam, & breviter oſtendam me potuiſſe unitatem, cubum & quadratum, ut etiam numerum nuncupare, nec tamen ideo me veluti tirannidem quamdam in ipſum exercuiſſe quaſi eadem ipſi non licere vellem. Unitatem pro cubo & quadrato ab omnibus aſſumi non inficias ibo, ſed de hoc non agitur, & nunquam negatum eſt; eam autem pro numero ſumi poſſe non conceditur, ut etiam numeri nuncupationem ſortiri poſſe, cum ſolitaria eſt, contenditur quamquam brevitatis cauſa quando cum numero aliquo vel numeris reperitur, numeros in plurali, quam cum circumloctione, tales numeros cum unitate ſatius ſit enunciare. Nunc ad ea quæ partes aliquotas ſpectant properandum. In his quæ de partibus aliquotis attuli propoſitum mihi ſolummodo fuit indicare partes aliquotas haud proprie multitudine terminatas, ſed infinitas, ſeu indefinitas fractis tribuendas eſſe, & ideo minime admitten-

as : Quod autem $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{16}$, in partibus aliquotis numeri $\frac{343}{64}$ enumeraverim id feci, quia cum relationem habeant cum ſuo integro per numerum ejuſdem qualitatis ac ipſe numerus integer, quiſque enim eſt numerus cum fractis junctus, non rejiciendas exiſtimavi: quod ut clarius pateat numerus $\frac{343}{64}$ eſt $5\frac{23}{64}$ nempe numerus 5 cum fractis $\frac{23}{64}$ relativi autem partium $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{8}$ ſunt $\frac{343}{2}$ $\frac{343}{16}$ $\frac{343}{8}$ ſeu $171\frac{1}{2}$ $85\frac{1}{4}$ $42\frac{7}{8}$ nempe numeri integri cum fractis, & ejuſdem naturæ, quam, ad quem ſpectant ipſæ partes, numerus integer, & adeo hi numeri eodem jure pro partibus ſunt recipiendi quam qui a nobiliſſimo, ac eruditiſſimo, & mihi honoratiſſimo D. vicecomite *Brouncker Londinenſis* urbis ornamento ſunt exhibiti, qui quidem relativos habent à ſuo numero diſſidentes nempe 343. 49. 7. qui ſunt numeri integri cum tamen numerus propoſitus ſit intiger cum fractis. Igitur ſi ſingulæ è partibus â me aſſignatis non ſint pars ſed partes, numerus etiam cujus ſunt non eſt pars, ſed partes. Inſuper proprietatem quandam in ſingulis numeris integris agnoſco, qua deſtituuntur expoſitæ à prædicto Illuſtriſſimo vicecomite partes aliquotæ, hæc autem eſt illa proprietas, Quælibet pars aliquota cujuſcunq; numeri compoſiti, aliam habet in partibus ejuſdem numeri relativum, vel ſaltem ſeipſam (ſi numerus ſit quadratus) excepta unitate, quæ non partem, ſed totum numerum habet relativum: inſupra dictis vero exhibitis ſecus fit, illarum enim prior nempe $\frac{1}{64}$ numerum 343. ſubſequens, $\frac{7}{64}$ numerum 49. poſtrema denique $\frac{49}{64}$ numerum 7. pro relativis habet qui quidem numeri ſi partes etiam eſſe debent, ſingulæ ex his partibus ſuo erunt toto majores.

Sed & quandoquidem Clar. *Wal.* 5. cubos in 10. abeuntes ut & ego ipſe repererit quamquam in binis prioribus aliquantum adjutus jam ſextum omnium remotiſſimum in numeris Analyticis pag. 4. prædicti latini opuſculi contentum accipiat, inſuper & quadratum ſecundumſed ne gravioribus forſan occupatum ſpeculationibus in ipſorum examine longius detineam, hos in partibus, & ſummarum ad quemlibet cubum aut quadratum partialem attinentium partibus tradam.

Cubo-

Cuborum part radices.	Summarum partes. nempe cbuorum partialium cum suis partibus.						
32		3	5		17		257
241	4		9	11		113	257
467	8	9	5	13		113	193
243	32		5		17	41	193
73	4		5	13	37	41	
31	64			13	37		
5	4	3		13			
7	16		25				

Quadratorum part. radices.	Summarum partes.				
499	3	7	13	9	109
263		49	13		109
191		79		31	
4				31	
5				31	
67	3	49		31	
439	3			931	67
37	3	7			67
163	3	7		19	67
11		7		19	
7	3			19	

Sed quamdiu tua tam libenter abutar patientia, ut tamdiu te vir illustrissime ac mihi honoratissime & charissime in hisce colloquiis? detineam! certe ista non auderem nisi multum in tua benevolentia confideret.

Eques Excellentissime,

Tibi devotissimus & obsequentissimus

B. Frenicle *de* Bressy.

EPISTOLA XLIV.

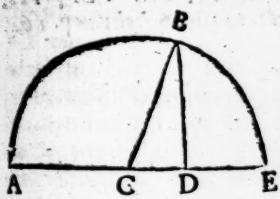
D. Joh. Wallis *ad D.* Kenelmum Digby.

Humillimas rependo gratias, Vir Illuſtriſſime, ob literas tuas 8 Maij datas, quas cũ inclusis Frenicleis accepi. Quamvis enim non poſſim, quibus me laudibus oneratis, ut mihi debitas vendicare, (Ecquid enim eſt in paucorũ problematũ ſive Arithmeticorum ſive Geometricorũ ſolutione quod illud mereatur?) a vobis tamen ultro ſic laudari, non eſt cur parvi faciam. Sive enim illud ex ludicio proveneris, (cujus in tantis viris non leve pondus erit,) ſive ex *Affectu*: cum tamen a ſummis viris tum Æſtimari tum Amari, utrumq; magni ſit habendum; ſi alterutrum ſaltem eorum ſpondere mihi poſſe videar, non eſt cur illud gratus non agnoſcam. Gaudeo utiq; ſi tum votis Tuis, Eques Illuſtriſſime, tum Clariſſimorum Virorum quæſitis, haud infeliciter reſpondimus. Et ſiquid adhuc hæreat cui nondum uſquequaque ſatisfactum putaverint; cum præcipua tamen eorum quæ fuerant propoſita ſoluta dedimus, tum & ſolvendi methodos, (nec interim hiſce ſatis vacamus,) non tanti eſſe puto ut perpetuis proptetea velitationibus nos implicemus. Vix enim dubito quin exiſtiment vel ipſi, ubi reliqua viderint ſoluta, poſſe nos & ea quæ ſuperſunt, modo libeat & vacet aggredi, ſoluta dare. Sed neq; illud credo, exigent Viri Nobiliſſimi. Cum enim quæſita noſtra ſiunum illud de *Duobus quadratis qui partibus ſuis aliquotis additi eandem efficiant ſummam* excipias, cui abunde ſatisfactum eſt) neglexerint omnia: Non ægre ferre debent ſi & ſuorum aliqua prætermittam. Ne tamen tergiverſari videar; Ad duo quæ in ultimis Fermatii literis ſuperſunt quæſita, libet hæc raptim reponere. Ad primum ſcil. Vbi petit *duos cubos rationales datis duobus* 1 & 8 *æquales*: Reſpondeo, Cubos numeri affirmativi $\frac{20}{7}$, & negativi $-\frac{17}{7}$ ſimul junctos, æquales eſſe duobus 1 & 8. Quippe $\frac{2000}{343} - \frac{4913}{343} = \frac{1082}{343} = 9$. Quo autem pacto reperi cubos affirmativum, & negativum, ſive quod tantundem eſt, duorum affirmativorum differentiam) duobus datis æquales eodem & duo affirmativi reperiendi ſunt, (ſed illi ſe primi obtulerunt;) Neq; enim exiſtimabit credo Vir doctiſſimus, difficilius eſſe, Duos Cubos rationales invenire qui datam ſummam (poſſibilem) efficiant; quam qui datam habeant (poſſibilem) differentiam (utut nunc hic nunc illic calculus ſit prolixior.) Et quidem in caſu expoſito

id

id ſolum requiritur, ut inveniantur duo cubi quorum aggregatum ſit cubi noncuplum, (quod, inſpecta numerorum cuborum tabella, atq; adhibitis quæ viro exercitato ſe ſponte offerent calculi compendiis, & qualia ad *Fermatij* Problema tertium jam aetehac adhibuimus, non magna difficultate exquiretur, ſi cui libeat calculum inſtituere;) quippe Cubi illi, per hunc diviſi, numerum exhibebunt $9 = 8 + 1$. Et pari methodo procedendum erit, quæcunq; alia exponatur cuborum exquirendorum ſive ſumma ſive differentia poſſibilis.

Ad alterum vero ubi exponit Theorema demonſtrandum, nempe, *Nullum in numeris eſſe Triangulum rectangulum, cujus area ſit numerus quadratus.* Id ſic demonſtro. In expoſito ſchemate (cujus conſtructio patet) Trianguli rectanguli *B C D* latera non poſſunt eſſe numeris effabilia, niſi AD DE ſint inter ſe ut numeri plani ſimiles (ſecus enim, qui ab ipſis fit, non erit numerus quadratus) ejuſq; radix BD effabilis hoc eſt, ut numeri quadrati inter ſe. Eſto ut $2aa, 2ee$. Erunt igitur CB, CD, BD, ut $aa + ee, aa - ee, 2ae$. Adeoq; CD, $\frac{1}{2}$ BD, ut $aa - ee, ae$. Et proinde (cum duorum quadratorum differentia, atq; eorundem medius proportionalis, non poſſint eſſe plani ſimiles) qui ab ipſis fit (hoc eſt area trianguli) non poteſt eſſe numerus quadratus. Quod erat demonſtrandum.



Quid autem, de numeris noſtris literis ſentiat Fermatius, nondum audio; de reliquis enim poſt eas Nov. 12. datas, omnibus plane altum ſilentium.

Ad poſtremas vero tuas literas, cum Frenicleis inclusis, nihil ultra lubet præter gratias reponere, &c.

ut hiſce tandem diſceptationibus modum imponam, quo ſaltem & finem imponamus moleſtiis tuis, quem omino nimis hactenus fatigavimus; Cujus deniq; veniam ſupplex oro,

Eques Illuſtriſſime,

Humillimo, obſequentiſſimo, & devinctiſſimo ſervo,

Oxonij. Janij 20. 1658.

JOH. WALLIS.

Errata sic emendoetur.

PAg. 11. l. 13, four. p. 21. l. 7. aiment. p. 39. l. 20. quadratorum. p 42. l. 24. aggrederemur. p. 47. l. 1. quotlibet, p. 48: l. 24. dele à. p. 50. l. 15. seriem. l. 22. tat. p. 53. l. 31. sed utrinq; p. 55. 21. rectis p. 56. l. 7. ex applicatis. p. 56. l. 30. alius. p. 65. l. 11. ce $\pm$ $\sqrt{}$ nee + b^2. ibid. ndd. + b l. 14 ndd + b. l. pen quaeratur. p. 67. l. 12. metuerem. p. 77. l. 11. 4hh. inter l. 14. & 15. 4hj + $3j^2$ + 1 = 3hh. p. 80. l. 10. per numerum l. 13. imperatam. p. 87. l. 2. 851525. p. 88. l. ult. 2 h + j. p. 90. l. 10. 3.) 2 × 2 × ^{2} (12. l. 32. literarium p. 100. l. 25. utriq; p. 101. l. 14. $\frac{1}{2}$. l. 31. Problematis p. 102. l. pen. numeros. p. 106. l. 7. numeri. p. 103. l. 28. autem p. 111. l. ult. enim arcus A E. p. 112. l. 9. FAc - FEc p. 122. l. 17. Kenelmum. p. 126. l. antep. si aliud p. 144. l. 16. calculus p. 164. l. 17. quin.

FINIS.

APPENDIX
ad Literas præcedentes.

EPIST. XLV.

D. Joh. Wallis *ad D.* Vicecom. Brouncker.

Illuſtriſſime Domine,

POſtquàm præcedentes literas abſolverat prelum, & cœperant divulgari, accepi hodie, à Te tranſmiſſas, Illuſtriſſimi Equitis Digbæi literas, Junii 19 datas, unà cum incluſis D de Fermat. Quas autem memorat 25 Maii datas periiſſe autumo (& ſiquid ſecum ferebant) ad me ſaltem hactenus non pervenerunt. Quas autem jam accepi, propter elegantes non paucas Fermatii propoſitiones, & ſe dignas, prelo ſtatim atque accepi ſubjeci, ut reliquis Appendicis loco ſubjiciantur; in iis ſaltem exemplaribus quæ nondum diſtrahuntur: Tum ut tanti ingenii ſpecimina & ſummo viro digna publice innoteſcant, tum ut alii mecum à Clariſsimo Viro exigant quæ publicâ luce digna apud ſe hactenus premit. Cum enim ſummum eum in hiſce rebus virum eſſe abunde conſtet, atque in quæſtionibus numeroſis quas plerique hactenus neglexerunt peculiarem impendiſſe operam, aliaque inſuper multa in Geometricis mirâ ſubtilitate inveſtigâſſe; non permittendum eſſe videtur ut ea ſibi ſoli ſuiſq; retineat omnia, quę literato orbi fore pergratiſsima non erit dubitandum. Qua in re tum Dominationem veſtram à me neutiquam diſſentire confido, tum nec in reddendis gratiis pro ea qua nos humanitate accepit, atque eſt dignatus elogio, quale & & ſibi viciſsim lubentes rependimus. Reſponſum autem ad hæc vel omittendum plane erit, vel ſaltem differendum; cum jam vix perlegendi copia detur antequam mandentur prelo, unde jam præcedentia erepſerunt. Quæ jam ipſe exequutus eſt, non erit neceſſe ut nos actum agendo iterum inquiramus; ubi adhuc hæret, ſi opera noſtra ſibi uſui eſſe poſſit, non hanc gravabimur impertire. Atque hæc quidem ubi raptim dixerim, id ſaltem ſupereſt, ut me profitear,

Oxonii Julii 3.
1658. *St. vet.*

Illuſtriſſime Domine,
Obſervantiſſimum Tui, atque obſequentiſſimum,
Joh. Wallis.

EPISTOLA XLVI.

D. Kenelmi Digby *ad D.* Joh. Wallis.

Noble Sir,

I Received lately from Monſ. *Fermat*, the encloſed written paper, with a deſire from him to conveigh it to my Lord *Brounker* and your ſelf. I hope you have received mine of the 8. and 25 of *May*. A main errand of this preſent Letter is humbly to take my leave of you for ſome months; for I am ere long going a journey that will take up all this ſummer at the leaſt. When I return to *Paris*, I will give you account of it by preſenting my humble reſpects unto you. In the mean time I ceaſe further troubling you, and remain

Paris 19 *June* 1658.

Noble Sir,
Your moſt humble and moſt obedient ſervant, that highly honoureth you,

KENELM DIGBY.

EPISTOLA XLVII.

D. Fermatii *ad D.* Kenelmum Digby. *præcedenti incluſa.*

ILluſtriſſimos Viros Vicecomitem Brouncker & Johannem Walliſium quæſtionum numericarum à me propoſitarum ſolutiones tandem dediſſe legitimas libens agnoſco imò & gaudeo Noluerunt Viri Clariſſimi vel unico momento impares ſeſe aut ἥττονας quæſtionibus propoſitis confiteri; mallem ipſos & quæſtiones dignas laboribus Anglicis ſtatim agnoviſſe, & poſtquam adepti ipſarum ſolutiones fuiſſent triumphum eo illuſtriorem egiſſe quo certamen magis arduum apparuiſſet. Contrarium ipſis viſum eſt. Id ſanè gloriæ Illuſtriſſimæ & Ingenioſiſſimæ nationis condonandum. Verùm ut deinceps ingenue

genue utrimque agamus, fatenturGalli propoſitis quæſtionibus ſatisfeciſſe Anglos: Sed fateantur viciſſim Angli quæſtiones ipſas dignas fuiſſe quæ ipſis proponerentur, nec dedignentur in poſterum numerorum integrorum naturam accuratius examinare & introſpicere, imo & doctrinam iſtam, quâ pollent ingenii vi & ſubtilitate, propagare. Quod ut ab illis libentius impetremus, Diophantum ipſum & celeberrimum illius interpretem Bachetum ad authoritatem rei proponimus. Supponit Diophantus in pleriſque libri 4i & 5i quæſtionibus numerum omnem integrum vel eſſe quadratum vel ex duobus aut tribus aut quatuor quadratis compoſitum. Id ſibi Bachetus in commentariis ad quæſtionem 31am libri 4i perfecta demonſtratione aſſequi nondum licuiſſe fatetur. Id Renatus ipſe Deſcartes incognitum ſibi ingenuè declarat in Epiſtola quadam quam propediem edendam accepimus, imò & viam quâ huc perveniatur difficillimam & abſtruſiſſimam eſſe non diffitetur. Cur igitur de propoſitionis illius dignitate dubitemus, non video. Ejus tamen perfectam demonſtrationem à me inventam moneo viros clariſſimos. Poſſem & pleraſque adjungere propoſitiones non ſolum celeberrimas ſed & firmiſſimis demonſtrationibus probatas. Exempli cauſa.

Omnis numerus primus qui unitate ſuperat quaternarii multiplicem eſt compoſitus ex duobus quadratis. Hujuſmodi ſunt 5. 13. 17. 29. 37. 41. &c. Omnis numerus primus qui unitate ſuperat ternarii multiplicem eſt compoſitus ex quadrato & triplo alterius quadrati, tales ſunt 7. 13. 19. 31. 37. 43. &c. Omnis numerus primus qui vel unitate vel ternario ſuperat octonarii multiplicem componitur ex quadrato & duplo alterius quadrati, tales ſunt 3. 11. 17. 19. 41. 43. &c.

Sed & præcedentem Bacheti propoſitionem generaliter olim Domino de Saint Croiſe propoſuimus, ejuſque demonſtrationem non ignoramus.

Omnis numerus integer vel eſt triangulus, vel ex duobus, aut tribus triangulis compoſitus.

Eſt quadratus vel ex duobus, tribus, aut quatuor quadratis compoſitus.

Eſt pentagonus vel ex duobus, tribus, quatuor, aut quinque pentagonis compoſitus.

Eſt hexagonus vel ex duobus, tribus, quatuor, quinque vel ſex hexagonis compoſitus.

Et ſic uniformi in infinitum enuntiatione.

Hæc omnia & alia infinita quæ ad numeros integros ſpectant quæque à nobis & inventa & generaliter demonſtrata ſunt poſſemus & proponere viris Clariſſimis & proponendo negotium ſaltem aliquod ipſis facеſcere. Sed ingenuitatem Gallicam ſapient magi ſpropoſitiones aliquot quarum demonſtrationem à nobis ignorari non deffitemur, licet de earum veritate nobis conſtet. Meminimus Archimedem non dedignatum propoſitionibus Cononis, veris quidem, ſed tamen indemonſtratis, ultimam manum imponere, earumque veritatem demonſtrationibus illis ſubtiliſſimis confirmare. Cur igitur ſimile auxilium à viris Clariſſimis non expectem, Conon ſcilicet Gallicus ab Archimedibus Anglis?

1 Poteſtates omnes numeri 2, quarum exponentes ſunt termini progreſſionis Geometricæ ejuſdem numeri 2, unitate auctæ ſunt numeri primi.

Exponatur progreſſio Geometrica 2. cum ſuis exponentibus.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	8	16	32	64	128	256.

Primus terminus 2. auctus unitate facit 3. qui eſt numerus primus. Secundus terminus 4. auctus unitate facit 5. qui eſt pariter numerus primus. Quartus terminus 16 auctus unitate facit 17 numerũ primũ. Octavus terminus 256. auctus unitate facit 257. numerum primum. Sume generaliter omnes poteſtates 2. quarum exponentes ſunt numeri progreſſionis, idem accidet, Nam ſi ſumas deinde decimum ſextum terminum qui eſt 65536. ille auctus faciet 65537. numerum primum Hoc pacto poteſt dari & aſſignari nullo negotio numerus primus dato quocumque numero major. Quæritur demonſtratio illius propoſitionis, pulchræ ſane ſed & veriſſimæ, cujus ope, ut jam diximus, problema alias difficillimum ſolvi ſtatim poteſt. Dato quovis numero invenire numerum primum dato numero majorem, Hujus

jus clavis beneficio reserabant fortasse Viri clarissimi mysterium omne de numeris primis, hoc est Dato numero quovis invenire via brevissima & facillima an sit primus vel compositus.

2. Deinde. Duplū cujuslibet numeri primi vnitate minoris quā multiplex octonarii componitur ex tribus quadratis Esto quilibet numerus primus unitate minor quam octonarii multiplex (ut sunt 7. 23. 31. 47. &c) eorum duplum est 14. 46. 62. 94. componitur ex tribus quadratis. Propositionem illam veram asserimus, sed Cononis modo nondum aut asserente aut demonstrante Archimede.

3. Si duo numeri primi desinentes aut in 3. aut in 7. & quaternarii multiplicem ternario superantes inter se ducantur, Productum componitur ex quadrato & quintuplo alterius quadrati. Tales sunt numeri 3.7. 23. 43. 47. 67. &c. Sume duos ex illis exempli gratia 7. & 23. quod sub iis fit 161. componetur ex quadrato & quintuplo alterius quadrati, nam 81. quadratus & quintuplum 16. æquantur 161. Id verum asserimus generaliter, & demonstrationem tantum expectamus. Singulorum autem ex ipsis quadrati componuntur ex quadrato & quintuplo alterius quadrati, quod & demonstrandum proponitur.

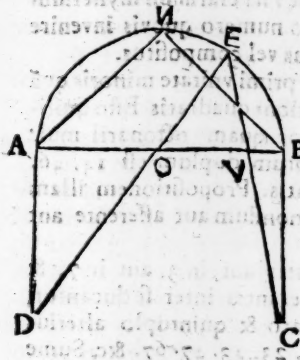
Sed ne demonstrationibus nimium fortasse deesse videamur, sequentem propositionem & asserimus & possumus demonstrare.

Nullus numerus triangulus præter unitatem æquatur numero quadrato quadrato.

Sint trianguli ut norunt omnes 1. 3. 10. 15. 21. 28. 36. 45, &c. Nullus omnino facta in infinitum progressione præter solam unitatem erit quadrato quadratus.

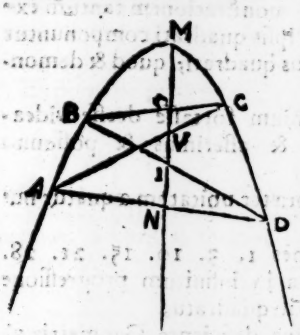
Ne autem ad numeros integros deficiente Geometria videamur confugisse en aliquot propositiones Geometricas, quæ Angliam invisere non erubescent. Priores duas ex restituta à nobis porismatum Euclidæorum Geometria excerpsimus.

Esto



Esto semicirculus *A N B* super diametro *A B*. bisecetur in *N* semicircumferentia *A N B* & junctis *N A*, *N B*, à punctis *A*, & *B* excitentur perpendiculares *A D*, *B C*. ipsis *A N*, *N B*, æquales. Sumpto quolibet in semicircumferentia puncto, ut *E*; junctis rectis *D E*, *E C*, occurrentibus diametro in punctis *O* & *V*. aio, Duo quadrata *A V*, *B O*, simul sumpta, esse in omni casu æqualia quadrato diametri *A B*.

Generalius in tractatu nostro hoc problema aut theorema proponebamus sed in præsens speciale hoc sufficit.



Esto parabole quævis *A M C*. in qua sumantur duo quælibet puncta *A* & *B*. & diameter quævis *M N*. sumatur quodcumque aliud punctum in parabole ut *C*. à quo ad puncta *A* & *B*, jungantur rectæ diametrum secantes. In eadem semper ratione secabitur diameter. Nam sumpto alio quovis puncto *D* erit *M O* ad *O V*, ut *M I* ad *I N*. Et semper similes abscissæ à diametro, in eadē erunt ratione.

Hæc à nobis & inventa sunt & demonstrata; quæ ἀμοιβάιως pro theoremate Frusti Conici offerimus.

Sed & quæ nondum ex omni parte completa sunt, tentanda Anglis proponere non dubitamus.

Datis punctis rectis aut circulis invenire parabolem quæ per data puncta transeat & datas rectas aut circulos contingat.

Dari autem quatuor ex istis sufficit. Exempli gratiâ datis duobus punctis recta & circulo invenire parabolem quæ per data

data puncta tranſeat & rectam circulumque datos contingat. Unde emergunt 15 problemata.

In Ellipſi aut hyperbolâ idem proponatur. Sed eo caſu debent dari quinque aut puncta aut rectæ aut circuli, aut quædam ex iſtis numero quinque, & inde emergunt 21 problemata.

Nos olim in tractatu de contactibus ſphæricis ſimilia in ſphærâ expedivimus. Et tandem feliciter problema ſequens conſtruximus.

Datis quatuor ſphæris, invenire quartam quæ quatuor datas contingat. Tractatum integrum penes Dominum de Carcavi invenies.

Monemus tantum Viros Clariſſimos ut ſepoſitis tantiſper ſpeciebus analyſeos problemata Geometrica viâ Euclideanâ & Apolloniana exequantur, ne pereat paulatim elegantia & conſtruendi & demonſtrandi, cui præcipuè operam dediſſe veteres innuunt ſatis & data Euclidis, & alii à Pappo enumerati analyſeos libri: quos omni ex parte jam olim ſupplevimus dum operibus Vietæ, Ghetaldi, Snellii, tractatus noſtros de locis planis, de locis ſolidis & linearibus, de locis ad ſuperficiem, & de poriſmatibus adjecimus: quos omnes habet dictus Dominus de Carcavi.

ERRATA.

ERRATA.

CVm propter necessariam meam à prelo absentiam, dum aliquot ex postremis foliis imprimerentur, errata plura quam velim irrepserint (& quidem in ipso præcedente erratorum catalogo;) minora, quæ sensum non turbant, tum hic tum alibi (spero) facile condonabit Lector; quæ vero adhuc alicujus momenti videantur, sic emendet.

p. 170. l. 6. CD = c. l. 10. $r^2 - c^2$. l. 12. c + p. l. ult. & eædem. p. 173. l. 1. Et ponamus, l. 3. differentia l. 11. sinuum oppositorum angulorum. l. 12. F E) = a. l. 23. (subtus) dd. l. 25. ccddmm. l. 26. 2mmbddc. l. 28. 2mmbdd. l. 30. + nnδδ − mmbb. p. 176. l. 5. me ad ista. l. 13. acceptas. p. 178. l. 24. 343. p. 179. l. 13. dele 13. l. 15. 7. q 13. l. ult. Bessy. p. 181. l. 18, 19. quadratus, ejusque radix BD effabilis) hic est. l. 27. nuperis. l. 28. Nov. 21. l. 33. nimio nimis. l. pen. Iunii. p. 182. l. 6. [p. 72. l. 11.] l. 9. [2 × 9] l. 10. [p. 109. l. 28.] p. 169. l. 1. tiones eo spectantes.

FINIS.